Université Gustave Eiffel
Préparation à l'Agrégation Interne de Math 2025-26

Devoir 2025-26-1–corrigé – Alain Tissier.

SUITES RÉCURRENTES

A) La convergence

1) Il s'agit de trouver les réels $a \geqslant 0$ tels que $a = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a})$, soit $a = \sqrt{a}$, soit $a = 0$ ou $a = 1$.

2)a) Par l'absurde, si $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$ alors d'après la relation de récurrence $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ soit : $U = (0)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $u_0 > 0$ ou $u_1 > 0$. D'après (R), si l'un de u_{n-2} et u_{n-1} est strictement positif il en est de même de u_n. Donc $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

2)b) Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence de $n \geqslant 0$ tel que $(u_n, u_{n+1}) = (1, 1)$. On a $u_{n+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1} + \sqrt{1}) = 1$. Par récurrence on obtient ainsi $u_i = 1$ pour tout $i > n$. Si $n \geqslant 1$, on a $1 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 1)$ donc $u_{n-1} = 1$. Par récurrence descendante on obtient $u_i = 1$ pour tout $i < n$. Ainsi $U = (1)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

3)a) Si $v_n = 0$ alors $u_n = 0$ ou $u_{n+1} = 0$ donc $U = (0)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

3)b) Puisque $u_{n+1} \geqslant v_n$ et $u_n \geqslant v_n$, on a $u_{n+2} \geqslant \frac{1}{2}(2\sqrt{v_n}) = \sqrt{v_n}$, et puisque $v_n \leqslant 1$ on a $\sqrt{v_n} \geqslant v_n$. Donc $u_{n+2} \geqslant v_n$, et comme $1 \geqslant v_n$ et $u_{n+1} \geqslant v_n$, on a : $v_{n+1} \geqslant v_n$.

Pour w_n, c'est le même raisonnement avec des $\leqslant$ au lieu de $\geqslant$. Puisque $u_{n+1} \leqslant w_n$ et $u_n \leqslant w_n$, on a $u_{n+2} \leqslant \sqrt{w_n} \leqslant w_n$, car $w_n \geqslant 1$. Donc $u_{n+2} \leqslant w_n$, et comme $1 \leqslant w_n$ et $u_{n+1} \leqslant w_n$, on a : $w_{n+1} \leqslant w_n$.

3)c) On a vu : $u_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$, de même $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_{n+1}}$ et a fortiori $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_n}$ et comme $1 \geqslant \sqrt{v_n}$ on a : $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.

De même on a vu : $u_{n+2} \leqslant \sqrt{w_n}$, et $u_{n+3} \leqslant \sqrt{w_{n+1}} \leqslant \sqrt{w_n}$ et comme $1 \leqslant \sqrt{w_n}$ on a : $w_{n+2} \geqslant \sqrt{w_n}$.

3d)) La suite (v_n) est strictement positive pour $n \geqslant 2$, croissante et majorée par 1. Elle tend donc vers une limite ℓ' vérifiant : $0 < \ell' \leqslant 1$. Comme $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$, on obtient par passage à la limite : $\ell' \geqslant \sqrt{\ell'}$ donc, puisque $\ell' > 0$, $\ell' \geqslant 1$. Finalement $\ell' = 1$.

De même la suite (w_n) est décroissante et minorée par 1. Elle tend donc vers une limite $\ell'' \geqslant 1$ vérifiant : $\ell' \leqslant 1$. Comme $w_{n+2} \leqslant \sqrt{w_n}$, on obtient par passage à la limite : $\ell'' \geqslant \sqrt{\ell''}$ donc, puisque $\ell' > 0$, $\ell'' \geqslant 1$. Finalement $\ell'' = 1$.

On a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ donc par encadrement (u_n) tend vers 1.

*****

B) Les variations de (u_n)

1) On a : $u_{p+2}-1 = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{p+1}}-1)+\frac{1}{2}(\sqrt{u_p}-1) \geqslant 0$. D'après **A2b)**, puisque U n'est pas constante, on a : $(u_p, u_{p+1}) \neq (1,1)$ donc $(\sqrt{u_{p+1}}-1)+(\sqrt{u_p}-1) > 0$ et finalement $u_{p+2} > 1$.

Ainsi $u_{p+1} \geqslant 1$ et $u_{p+2} > 1$. Donc $u_{p+3} > 1$.

On conclut par récurrence. Soit $q \geqslant 3$; supposons prouvés $u_n > 1$ pour $p+2 \leqslant n \leqslant q$; alors comme $u_{q-1} > 1$ et $u_q > 1$, on a $u_{q+1} > 1$. Ainsi $u_n > 1$ pour $n \geqslant p+2$.

2) Preuve similaire. On a : $u_{p+2} - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{p+1}} - 1) + \frac{1}{2}(\sqrt{u_p} - 1) \leqslant 0$. D'après **A2b)**, on a : $u_{p+1} - 1 < 0$ ou $u_p - 1 < 0$ donc $u_{p+2} < 1$. Par récurrence $u_n < 1$ pour $n \geqslant p+2$.

3) Supposons d'abord $q = 0$.

Alors $u_0 \neq 1$ d'après **A2b)**. Si $u_0 > 1$ (resp. < 1) alors $u_n > 1$ (resp. < 1) pour tout $n \geqslant 2$. Ainsi U vérifie ou bien (R+) ou bien (R-) pour la valeur 0.

On suppose maintenant $q \geqslant 1$.

On a $u_{q-1} \neq 1$ d'après **A2b)**. Si $u_{q-1} > 1$ (resp. < 1) alors $u_n > 1$ (resp. < 1) pour tout $n \geqslant q+1$.

Si $q = 1$ alors U vérifie ou bien (R+) ou bien (R-) pour la valeur $0 = q-1$.

Si $q \geqslant 2$ alors $u_{q-2} < 1$ (resp. > 1) car si $u_{q-2} \geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$) alors $u_q < 1$ (resp. >1). Donc U vérifie ou bien (R+) ou bien (R-) pour la valeur $p = q-1$.

S'il existe r tel que $u_r = 1$ alors $r < q$ car $u_n \neq 1$ pour $n > q$, mais alors $u_q \neq 1$ et c'est contradictoire donc q est le seul n tel que $u_n = 1$.

4) Par définition p est le plus petit entier n tel que $(u_n - 1)(u_{n+1} - 1) \geqslant 0$. Donc $(u_n - 1)(u_{n+1} - 1) < 0$ pour tout $n \leqslant p-1$. On en déduit que le signe de $(u_0 - 1)(u_p - 1)$ est $(-1)^p$ donc celui de $u_0 - 1$ est $(-1)^p$ si U vérifie (R+) pour la valeur p et $(-1)^{p+1}$ si U vérifie (R-) pour la valeur p.

5) Il n'existe donc aucun n tel que $(u_n - 1)(u_{n+1} - 1) \geqslant 0$. Donc $(u_n - 1)(u_{n+1} - 1) < 0$ pour tout n. En particulier $u_n \neq 1$ pour tout n.

*****

C) Existence des différents types de suites (u_n)

1) Par construction on a $f_0(t) = a$, $f_1(t) = t$, puis

$$f_n(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{f_{n-1}(t)} + \sqrt{f_{n-2}(t)}\right)$$

pour tout $n \geqslant 2$.

Les fonctions $t \mapsto a$ et $t \mapsto t$ sont continues. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue. Soit $n \geqslant 2$. Supposons acquise la continuité de f_k pour tout $k < n$, ce qui est vrai pour $n = 2$; alors f_{n-1} et f_{n-2} sont continues, puis $f_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{f_{n-1}} + \sqrt{f_{n-2}}\right)$ est continue. Par récurrence on prouve ainsi que f_n est continue pour tout $n \geqslant 1$.

La fonction $f_1 : t \mapsto t$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ il en est de même de f_2 : $t \mapsto \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{t})$. Soit $n \geqslant 3$; supposons établi $\lim\limits_{t \to +\infty} f_k$ pour tout k de 1 à $n-1$; alors $f_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{f_{n-1}} + \sqrt{f_{n-2}}\right)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Par récurrence on prouve ainsi que f_n tend vers $+\infty$ en $+\infty$ pour tout $n \geqslant 1$.

On prouve de même que puisque f_1 et f_2 sont strictement croissantes il en est de même de f_n pour tout $n \geqslant 1$.

2) Supposons $t = 0$. D'après **A2)** on a $u_n < 1$ pour tout $n \geqslant 2$ donc $f_n(0) < 1$ pour tout $n \geqslant 2$. D'après **1)** f_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[f_n(0), +\infty[$. Il existe donc un et un seul t tel que $f_n(t) = 1$.

Puisque $f_1(t) = t$ il est clair que 1 est le seul t tel que $f_1(t) = 1$. Donc $t_1 = 1$.

On a $1 = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{t_2})$ donc

$$t_2 = (2 - \sqrt{a})^2.$$

3) Supposons $t = t_q$. Par construction $u_q = 1$. D'après **B3)**, U vérifie (R+) ou (R-) pour la valeur $q - 1$.

Si $q = 1$ alors puisque $u_0 = a < 1$, U est dans (R-) pour la valeur 0, donc $u_n < 1$ si $n > 1$, puis $t_n > t_1 = 1$.

Si $q \geqslant 2$, d'après **B4)** puisque $u_0 - 1 < 0$ et $(u_n - 1)(u_{n+1} - 1) < 0$ pour tout $n \leqslant q - 2$, u_{q-1} est du signe de $(-1)^q$.

Si q est pair (resp. impair) alors $u_{q-1} > 1$ (resp. $u_{q-1} < 1$) donc U vérifie (R+) (resp. (R-)) pour la valeur $q - 1$.

Soit un entier $n > q$. Donc $u_n = f_n(t_q) > 1 = f_n(t_n)$ (resp. $u_n = f_n(t_q) < 1 = f_n(t_n)$) et comme f_n croît strictement on a $t_n < t_q$ (resp. $t_n > t_q$) pour tout $n > q$.

4) On a $t_{2m-1} < t_{2m+1} < t_2$ donc la suite (t_{2m-1}) est croissante et majorée ; elle converge vers une limite τ_-.

On a $t_{2m} > t_{2m+2} > t_1$ donc la suite $(t_{2m-1}$ est décroissante et minorée ; elle converge vers une limite τ_+. Mais comme $t_{2m-1} < t_{2m}$, on a $\tau_- \leqslant \tau_+$.

5) On a $0 < t_1 = 1 < t_3 < \cdots < \tau$ et $+\infty > t_2 > t_4 > \cdots > \tau$.

- Si $0 \leqslant t \leqslant t_1$ alors $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$ donc U vérifie (R-) pour la valeur 0. Ainsi $[0, t_1] \subset I_-(a, 0)$.
- Si $t_{2m-1} < t \leqslant t_{2m+1}$ pour un certain $m \geqslant 1$, alors $f_{2m-1}(t) > 1 \geqslant f_{2m+1}(t)$ soit $u_{2m-1} > 1 \geqslant u_{2m+1}$. De plus $t_{2m} > t_{2m+1}$ donc $u_{2m} < u_{2m+1}$ donc $u_{2m} < 1$. Ainsi U vérifie (R-) pour la valeur $2m$ soit $]t_{2m-1}, t_{2m+1}] \subset I_-(a, 2m)]$.
- Si $t \geqslant t_2$ alors $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ tandis que $u_0 = a < 1$, donc U vérifie (R+) pour la valeur 1. Ainsi $[t_2, +\infty[\subset I_+(a, 1)$.

- Si $t_{2m} > t \geqslant t_{2m+2}$ pour un certain $m \geqslant 1$, alors $u_{2m} < 1 \leqslant u_{2m+2}$. De plus $t_{2m+1} < t_{2m+2}$ donc $u_{2m+1} > u_{2m+2}$ donc $u_{2m+1} > 1$. Ainsi U vérifie (R+) pour la valeur $2m+1$ soit $[t_{2m+2}, t_{2m}[\subset I_+(a, 2m+1)]$.
- Si $t = \tau$ alors U vérifie (S) et $\{\tau\} \subset J(a)$.

Les ensembles $I_-(a, 2m)$ pour $m \in \mathbb{N}$, $I_+(a, 2m-1)$ et $J(a)$ sont deux à deux disjoints d'après leurs définitions.

Les intervalles $[0, t_1]$, $]t_1, t_3]$, $\ldots$; $[t_2, +\infty[$, $[t_4, t_2[$, $[t_6, t_4[$, $\ldots$; $\{\tau\}$, constituent une partition de $[0, +\infty[$. Les inclusions prouvées ci-dessus sont donc des égalités.

*****

D) Une équation aux différences finies

1) En multipliant par α^{-n-1} les deux membres de (E) on obtient (E').

On a par sommation : $z_n = z_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha^{-k-1} y_k$,

puis : $x_n = x_0 \alpha^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-k-1} y_k$.

2) $x_n = \alpha^n x_0 + \alpha^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\beta/\alpha)^k = \alpha^n x_0 + \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$.

3a) On a : $|x_n| \leqslant |\alpha^n||x_0| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{n-k-1}|y_k| \leqslant |\alpha^n||x_0| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{n-k-1} C|\beta|^k$,

soit $|x_n| \leqslant |\alpha|^n |x_0| + C\frac{|\beta|^n - |\alpha|^n}{|\beta| - |\alpha|}$.

Puis : $|x_n| \leqslant |\beta|^n \left(|x_0| + C\frac{1}{|\beta| - |\alpha|}\right)$, ce qui prouve bien que $x_n = \mathcal{O}(|\beta^n|$.

3bi) On reprend le calcul de **3a)**. On a toujours $|y_n| \leqslant C|\beta|^n$ pour $n \leqslant N(\varepsilon) - 1$ et de plus $|y_n| \leqslant \varepsilon|\beta|^n$ pour $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Fixons $n > N(\varepsilon)$.

On a : $|x_n| \leqslant |\alpha^n||x_0| + C \sum\limits_{k=0}^{N(\varepsilon)-1} |\alpha|^{n-k-1}|\beta|^k + \varepsilon \sum\limits_{k=N(\varepsilon)}^{n-1} |\alpha|^{n-k-1}|\beta|^k$,

puis : $\sum\limits_{k=0}^{N(\varepsilon)-1} |\alpha|^{n-k-1}|\beta|^k = |\alpha|^{n-N(\varepsilon)} \frac{|\beta|^{N(\varepsilon)} - |\alpha|^{N(\varepsilon)}}{|\beta| - |\alpha|} \leqslant \frac{|\beta|^{N(\varepsilon)} - |\alpha|^{N(\varepsilon)}}{|\beta| - |\alpha|}$ car $|\alpha| < 1$.

et : $\sum\limits_{k=N(\varepsilon)}^{n-1} |\alpha|^{n-k-1}|\beta|^k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{n-k-1}|\beta|^k = \frac{|\beta|^n - |\alpha|^n}{|\beta| - |\alpha|}$.

On en déduit l'inégalité voulue :

$|x_n| \leqslant |x_0||\alpha^n| + C\frac{|\beta|^{N(\varepsilon)} - |\alpha|^{N(\varepsilon)}}{|\beta| - |\alpha|} + \varepsilon\frac{|\beta|^n - |\alpha|^n}{|\beta| - |\alpha|}$ pour tout $n > N(\varepsilon)$.

3bii) On a pour tout $n > N(\varepsilon)$:

$|\beta|^{-n}|x_n| \leqslant |x_0||\alpha/\beta|^{-n} + C|\beta|^{-n}\frac{|\beta|^{N(\varepsilon)} - |\alpha|^{N(\varepsilon)}}{|\beta| - |\alpha|} + \varepsilon\frac{1}{|\beta| - |\alpha|}$.

La limite quand n tend vers $+\infty$ du second membre de l'inégalité est $\varepsilon\frac{1}{|\beta| - |\alpha|}$.

Choisissons un réel $K > \frac{1}{|\beta|-|\alpha|}$.
Il existe $N'(\varepsilon) \geqslant N(\varepsilon)$ tel que $|\beta|^{-n}|x_n| \leqslant K\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N'(\varepsilon)$.
Finalement on a $|\beta|^{-n}|x_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N'(\varepsilon/K)$.
C'est une façon d'exprimer : $x_n = o(\beta^n)$.

3c) On a $y_n = c\beta^n + z_n$ où $z_n = o(\beta^n)$. Donc d'après les questions précédentes on a $x_n = c\alpha^n x_0 + \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} + o(\beta^n)$. Puis $\beta^{-n}x_n$ tend vers $\frac{c}{\beta-\alpha}$. C'est dire que $x_n \sim c\frac{\beta^n}{\beta-\alpha}$.

4ai) On reprend la notation $z_n = \alpha^{-n}x_n$. Comme $|y_n| \leqslant C|\beta|^n$ on a d'après (E') : $|z_{n+1} - z_n| \leqslant C|\alpha|^{-1}|\beta/\alpha|^n$.
Comme $|\beta/\alpha| < 1$, la série de terme général $|\beta/\alpha|^n$ converge. Donc la série de terme général $z_{n+1} - z_n = \alpha^{-n-1}x_{n+1} - \alpha^{-n}x_n$ converge absolument.

4aii) Étant absolument convergente, la série de terme général $z_{n+1} - z_n$ est convergente. Comme $z_n = z_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(z_{k+1} - z_k)$, la suite (z_n) converge. Notons $a = \lim(z_n)$.
On a donc $x_n = a\alpha^n + o(\alpha^n)$.

4aiii) $a - z_n$ est le reste d'ordre $n-1$ de la série de terme général $(z_{k+1} - z_k)$.
Comme $|z_{k+1} - z_k| \leqslant C|\alpha|^{-1}|\beta/\alpha|^k$ on a :

$$|a - \alpha^{-n}x_n| = |a - z_n| = |a - \alpha^{-n}x_n| \leqslant C|\alpha|^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}|\beta/\alpha|^k = \frac{C}{|\alpha| - |\beta|}|\beta/\alpha|^n.$$

4aiv) On a donc, en multipliant par $|\alpha|^n$ les deux membres de l'inégalité précédente : $|x_n - a\alpha^n| \leqslant C'|\beta|^n$ où $C' = \frac{C}{|\alpha|-|\beta|}$. C'est dire que $x_n = a\alpha^n + \mathcal{O}(\beta^n)$.

4b) Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N(\varepsilon)$ tel que $|y_n| \leqslant \varepsilon|\beta|^n$.
Pour tout $k \geqslant N(\varepsilon)$ on a d'après (E') : $|z_{k+1} - z_k| \leqslant \varepsilon|\alpha|^{-1}|\beta/\alpha|^k$.
Pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$, par sommation de n à $+\infty$ de la dernière il vient :

$$|a - \alpha^{-n}x_n| = |a - z_n| = |a - \alpha^{-n}x_n| \leqslant \varepsilon|\alpha|^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}|\beta/\alpha|^k = \frac{\varepsilon}{|\alpha| - |\beta|}|\beta/\alpha|^n,$$

puis en multipliant par $|\alpha|^n$ les deux membres de l'inégalité précédente : $|x_n - a\alpha^n| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\alpha|-|\beta|}|\beta|^n$.
Ainsi pour tout $n \geqslant N((|\alpha| - |\beta|)\varepsilon)$ on a $|x_n - a\alpha^n| \leqslant \varepsilon|\beta|^n$.
C'est dire que $x_n = a\alpha^n + o(\beta^n)$.
4c) On a donc $y_n = cy'_n + y''_n$ où $y'_n = c\beta^n$ et $y''_n = o(\beta^n)$. On a donc $x_n = x'_n + x''_n$ où
$x'_n = x'_0\alpha^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha^{n-k-1}y'_k = \alpha^n x'_0 + c\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$.

$x''_n = a''\alpha^n + o(\beta^n)$ pour un certain a''.
Ainsi : $x_n = a\alpha^n + c\frac{\beta^n}{\beta-\alpha} + o(\beta^n)$,
(a est toujours la limite de $\alpha^{-n}x_n$).

*****

E) Une première majoration de $(|x_n|)$

1) D'après le théorème des accroissements finis et puisque la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est $x \mapsto \mathrm{e}^x$ on a $\mathrm{e}^x - 1 = x\mathrm{e}^y$ où y est entre 0 et x. Donc $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$ si $x \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x$ si $x \geqslant 0$. Donc $|\mathrm{e}^x - 1| \leqslant |x|\mathrm{e}^{\max(x,0)}$ pour tout x.

2a) On a $w_{2m+2} \geqslant w_{2m}^{1/2}$. On prouve par récurrence : $w_{2m} = w_0^{1/2^m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

2b) On suppose $w_0 > 1$ car si $w_0 = 1$ ce que l'on veut prouver est vrai pour n'importe quel A_1).
Posons $x = 2^{-m}\ln(w_0)$; x est strictement positif.
On a $w_{2m} - 1 = \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x = 2^{-m}\ln(w_0))w_0^{1/2^m} \leqslant A_1 2^{-m}$ où

$$A_1 = w_0\ln(w_0).$$

3a) On a $v_{2m+2} \leqslant v_{2m}^{1/2}$. On prouve par récurrence : $v_{2m} = v_0^{1/2^m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

3b) On suppose $v_0 < 1$ pour les mêmes raisons que pour $w_0 > 1$.
Posons $x = 2^{-m}\ln(v_0)$; x est strictement négatif.
On a $1 - v_{2m} = |\mathrm{e}^x - 1| \leqslant |x| = 2^{-m}|\ln(v_0)| \leqslant A_2 2^{-m}$ où

$$A_2 = |\ln(w_0)|.$$

4) Si $n = 2m$ ou $2m+1$, $v_{2m} - 1 \leqslant x_n \leqslant w_{2m} - 1$ donc

$$|x_n| \leqslant \max(1 - v_{2m}, w_{2m} - 1) \leqslant \max(A_1, A_2)2^{-m} \leqslant A(1/\sqrt{2})^n$$

où $A = \max(A_1, A_2)\sqrt{2}$, puisque $m \geqslant (n/2) - 1$.

*****

F) Recherche d'un équivalent de x_n.

On note pour tout n :

$$r_n = \sup_{k \geqslant n} |x_k|,$$

1) La formule de Taylor-Young appliqué à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage de $x = 1$ donne ce résultat.

2) On a $x_{n+2} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+x_{n+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{1+x_n}$.

On a $\sqrt{1+x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{8}x_{n+1}^2) + o(x_{n+1}^2)$ et puisque $x_{n+1}^2 \leqslant r_n^2$, le terme complémentaire est aussi $o(r_n^2)$. De même pour $\sqrt{1+x_{n+1}}$ et finalement :

$$x_{n+2} - \tfrac{1}{4}x_{n+1} - \tfrac{1}{4}x_n = y_n \quad \text{où} \quad y_n = -\tfrac{1}{16}(x_n^2 + x_{n+1}^2) + o(r_n^2).$$

3a) $\lambda = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}$ et $\mu = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

3b) Posons $P = X^2 - \frac{X}{4} - \frac{1}{4} = (X-\lambda)(X-\mu)$.

Si $x > 0$ alors $P(x) < 0$ implique $x < \mu$ et $P(x) > 0$ implique $x > \mu$.

On a $P(1/2) = -1/8$ donc $\mu > 1/2$.

On a $P(2/3) = 1/36$ donc $\mu < 2/3$.

Comme $\lambda + \mu = 1/4$, on a $|\lambda| = -\lambda = \mu - 1/4$.

On a $\mu^2 = \frac{\mu+1}{4}$ donc $\mu^2 - |\lambda| = \frac{2-3\mu}{4} > 0$. Donc $|\lambda| < \mu^2$.

On a $\mu^3 = \frac{5\mu+1}{16}$ donc $\mu^3 - |\lambda| = \frac{5-11\mu}{16} > \frac{5-10\mu}{16} > 0$. Donc $|\lambda| > \mu^3$.

On pose :

$$x_{n+1} - \lambda x_n = z_n.$$

4) On a $z_{n+1} - \mu z_n = x_{n+2} - (\lambda+\mu)x_{n+1} + (\lambda\mu)x_n = x_{n+2} - (1/4)x_{n+1} - (1/4)x_n = y_n$.

5a) On a d'après **2)** : $|y_n| \leqslant \frac{1}{8}r_n^2 + \varepsilon_n r_n^2$ où ε_n tend vers 0.

Donc $|y_n| \leqslant C r_n^2$ pour un certain réel C positif.

D'après **E4)**, $|x_n| \leqslant A(1/\sqrt{2})^n$ et $|x_{n+1}| \leqslant A(1/\sqrt{2})^{n+1} \leqslant A(1/\sqrt{2})^n$ donc $r_n \leqslant A(1/\sqrt{2})^n$.

Finalement on a : $|y_n| \leqslant A^2 C (1/2)^n$. Donc : $y_n = \mathcal{O}((1/2)^n)$.

5b) On a donc $z_{n+1} - \mu z_n = y_n$ et $y_n = \mathcal{O}((1/2)^n)$.

Comme $\mu > \frac{1}{2}$. D'après **D4a)**, on a $z_n = a\mu^n + \mathcal{O}((1/2)^n)$ pour un certain réel a. On en déduit $z_n = a\mu^n + o(\mu^n)$.

5c) On a : $x_{n+1} - \lambda x_n = z_n$ et $z_n = a\mu^n + o(\mu^n)$. Comme $|\lambda| < \mu$ on a, d'après **D3b)** et **D3c)** :

$x_n = \frac{a}{\mu-\lambda}\mu^n + o(\mu^n) == b\mu^n + o(\mu^n)$ où $b = \frac{4a}{\sqrt{17}}$.

6a) On suppose désormais $a = 0$ ce qui entraîne $b = 0$ donc $x_n = o(\mu^n)$. On en tire : $r_n = o((\mu^n)$, et comme $y_n = \mathcal{O}(r_n^2)$, on a $y_n = o((\mu^2)^n)$.

6b) On a $z_{n+1} - \mu z_n = y_n$ et $y_n = o((\mu^2)^n)$. Comme $\mu^2 < \mu$ on a d'après **D3b)** : $z_n = o((\mu^2)^n)$.

6c) On a $x_{n+1} - \lambda x_n = z_n$ et $z_n = o((\mu^2)^n)$. Comme $|\lambda| < \mu^2$ on a d'après **D3b)** : $x_n = o((\mu^2)^n)$.

6d) On répète **6a)** avec μ^2 au lieu de μ. Il vient : $y_n = o((\mu^4)^n)$.

6e) On a $z_{n+1} - \mu z_n = y_n$ et $y_n = o((\mu^4)^n)$. Comme $\mu^4 < \mu$ on a d'après **D3b)** : $z_n = o((\mu^4)^n)$.

6f) On a $x_{n+1} - \lambda x_n = z_n$ et $z_n = o((\mu^4)^n)$. Comme $|\lambda| > \mu^3 > \mu^4$ on a d'après **D4b)** et **D4c)** :
$x_n = c\lambda^n + o((\mu^4)^n)$ pour un certain réel c.