Université Gustave Eiffel
Préparation à l'Agrégation Interne de Mathématiques 2025-26

Devoir 2025-26-1–énoncé – Alain Tissier.

À remettre au plus tard le 10 septembre 2025.

****

PROBLÈME : UNE SUITE RÉCURRENTE

Dans ce problème interviennent des suites réelles $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, etc.

On étudie les suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles positives vérifiant la relation :

$$\text{(R)} \qquad \forall n \geqslant 0, u_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right)$$

*****

A) La convergence.

1) Montrer qu'il existe exactement deux suites constantes vérifiant (R) : $U = (0)$ et $U = (1)$.

Dans la suite de cette partie on note $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante vérifiant (R).

2)a) Montrer : $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 2$.
b) Montrer qu'il n'existe aucun $n \geqslant 0$ tel que $(u_n, u_{n+1}) = (1, 1)$.

On pose

$$v_n = \min(u_n, u_{n+1}, 1) \text{ et } w_n = \max(u_n, u_{n+1}, 1).$$

3)a) Montrer : $v_n > 0$ pour $n \geqslant 2$.
b) Montrer que la suite (v_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
c) Établir : $v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$ et $w_{n+2} \leqslant \sqrt{w_n}$.
d) Montrer que les suites (v_n), (w_n) et (u_n) tendent vers 1.

*****

B) Les variations de (u_n)

On se donne dans cette partie une suite $U = (u_n)$ vérifiant (R) et qui n'est pas constante.

1) Dans cette question on suppose l'existence de n tel que $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$ et on note p le plus petit de ces n. Montrer : $u_n > 1$ pour tout $n \geqslant p+2$.

2) Dans cette question on suppose l'existence de n tel que $u_n \leqslant 1$ et $u_{n+1} \leqslant 1$ et on note p le plus petit de ces n. Montrer : $u_n < 1$ pour tout $n \geqslant p+2$.

On dira que U vérifie (R+) (resp. (R-)) pour la valeur p si $u_n \geqslant 1$ (resp. (R-)) pour tout $n \geqslant p$, p étant minimal pour cette propriété.

3) On suppose dans cette question qu'il existe q tel que $u_q = 1$. Montrer que la suite U vérifie ou bien (R+) ou bien (R-) pour la valeur 0 si $q = 0$, $q-1$ si $q \geqslant 1$. Y a-t-il unicité de q ?

4) On suppose dans cette question que la suite U vérifie (R+) (resp. (R-)) pour la valeur $p \geqslant 1$.

Montrer : $(u_{n+1}-1)(u_n-1) < 0$ pour tout n tel que $0 \leqslant n \leqslant p-1$. Préciser le signe de $u_0 - 1$ selon la parité de p et le signe + ou - affecté à (R).

5) On suppose dans cette question qu'il n'existe aucun p tel que U vérifie (R+) ou (R-) pour la valeur p.

Montrer : $(u_{n+1}-1)(u_n-1) < 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

On dira que U vérifie (S) si U vérifie (R) et la propriété du **5)**.

*****

C) Existence des différents types de suites (u_n)

On se donne un réel a tel que $0 \leqslant a < 1$. Pour tout $t \geqslant 0$ on note $U = (u_n)$ la suite vérifiant (R) et telle que $u_0 = a$ et $u_1 = t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n = f_n(t)$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, f_n est une fonction continue, strictement croissante et qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

2) Soit $n \geqslant 1$. Prouver l'existence et l'unicité de t tel que $f_n(t) = 1$. On note t_n le réel t ainsi obtenu.

Donner les valeurs de t_1 et t_2.

3) Soit un entier $q \geqslant 1$. Montrer que si q est pair alors $t_n < t_q$ pour tout $n > q$ et que si q est impair alors $t_n > t_q$ pour tout $n > q$.

4) Montrer que la suite $(t_{2m-1})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on note τ_-, que la suite $(t_{2m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on note τ_+ et que $\tau_- \leqslant \tau_+$.

On admet l'égalité $\tau_- = \tau_+$ et on note τ leur valeur commune.

5) On note $I_+(a,p)$ l'ensemble des t tels que U vérifie (R+) pour la valeur p, $I_-(a,p)$ l'ensemble des t tels que U vérifie (R-) pour la valeur p, $J(a)$ l'ensemble des t tels que U vérifie (S).

Déterminer ces ensembles à l'aide des t_n et de τ.

*****

Jusqu'à la fin du problème on étudie le comportement asymptotique des suites $U = (u_n)$ non constantes vérifiant (R).

Pour une telle suite il s'agit d'obtenir une relation $u_n - 1 \sim c\alpha^n$ pour un certain réel c non nul et un certain réel α vérifiant $0 < |\alpha| < 1$.

On emploiera les notations de Landau uniquement pour comparer une suite (x_n) tendant vers 0 à une suite géométrique :

- $x_n = \mathcal{O}(\alpha^n)$: il existe $C > 0$ tel que $|\alpha^{-n}x_n| \leqslant C$ pour tout $n \geqslant 0$.
- $x_n = o(\alpha^n)$: la suite $(\alpha^{-n}x_n)$ tend vers 0.
- $x_n \sim c\alpha^n$: la suite $(\alpha^{-n}x_n)$ tend vers c.

*****

D) Une équation aux différences finies

On donne une suite $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On étudie les suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation dite « aux différences finies » :

$$\text{(E)} \qquad \forall n \geqslant 0\ ,\ x_{n+1} - \alpha x_n = y_n,$$

où α est un réel tel que $0 < |\alpha| < 1$.

On donne un autre nombre réel β tel que $0 < |\beta| < 1$ et $|\beta| \neq |\alpha|$.

On notera $z_n = \alpha^{-n}x^n$.

1) Montrer que la relation (E) revient à :

$$\text{(E')} \qquad \forall n \geqslant 0\ ,\ z_{n+1} - z_n = \alpha^{-n-1}y_n,$$

En déduire une expression de (x_n) en fonction de x_0 et des y_k.

2) Dans cette question on suppose $y_n = \beta^n$.

Montrer :

$$x_n = \alpha^n x_0 + \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}.$$

Désormais on suppose $y_n = \mathcal{O}(\beta^n)$ et on note C un réel tel que $|y_n| \leqslant C|\beta^n|$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

3) On suppose dans cette question $|\alpha| < |\beta|$.

a) Montrer : $x_n = O(\beta^n)$.

b) On suppose de plus $y_n = o(\beta^n)$. On veut montrer : $x_n = o(\beta^n)$.

On note $N(\varepsilon)$ un entier tel que $|\beta^{-n}||y_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N(\varepsilon)$.

i) Montrer :

$$|x_n| \leqslant |x_0||\alpha^n| + C\frac{|\beta|^{N(\varepsilon)} - |\alpha|^{N(\varepsilon)}}{|\beta| - |\alpha|} + \varepsilon\frac{|\beta|^n - |\alpha|^n}{|\beta| - |\alpha|}$$

pour tout $n > N(\varepsilon)$.

ii) Conclure.

c) On suppose maintenant $y_n \sim c\beta^n$ où $c \neq 0$. Montrer : $x_n \sim c\frac{\beta^n}{\beta-\alpha}$.

4) On suppose dans cette question $|\beta| < |\alpha|$.

a) On veut montrer : $x_n = a\alpha^n + \mathcal{O}(\beta^n)$ pour un certain réel a.

i) Montrer que la série de terme général $z_{n+1} - z_n$ converge absolument.

ii) En déduire que la suite (z_n) admet une limite finie que l'on note a.

iii) Montrer :

$$|a - z_n| \leqslant \frac{C}{|\alpha| - |\beta|}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n.$$

iv) Conclure.

b) On suppose de plus $y_n = o(\beta^n)$. Montrer : $x_n = a\alpha^n + o(\beta^n)$.

c) On suppose maintenant $y_n \sim c\beta^n$ où c est un réel non nul. Prouver :

$$x_n = a\alpha^n + c\frac{\beta^n}{\beta - \alpha} + o(\beta^n).$$

*****

E) Une première majoration de $(|x_n|)$

Jusqu'à la fin du problème on se donne une suite $U = (u_n)$ non constante et vérifiant (R). On pose

$$u_n - 1 = x_n.$$

On sait que (x_n) tend vers 0 et cherche une estimation de x_n. On prouvea dans cette partie l'existence d'une constante réelle $A > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqslant A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

On utilise pour cela les suites (v_n) et (w_n) introduites dans la partie **A)**.

1) Montrer : $|e^x - 1| \leqslant |x|\mathrm{e}^{\max(0,x)}$ pour tout x réel.

2)a) Montrer : $w_{2m} \leqslant w_0^{1/2^m}$ pour tout entier m positif.

b) Prouver l'existence d'une constante $A_1 \geqslant 0$ telle que $w_{2m} - 1 \leqslant \frac{A_1}{2^m}$ pour tout entier m positif.

3)a) Montrer : $v_{2m} \geqslant v_0^{1/2^m}$ pour tout entier m positif.
b) Prouver l'existence d'une constante $A_2 \geqslant 0$ telle que $1 - v_{2m} \leqslant \frac{A_2}{2^m}$ pour tout entier m positif.

4) Prouver l'existence d'une constante $A > 0$ telle que $|x_n| \leqslant A(1/\sqrt{2})^n$ pour tout entier n positif.

*****

F) Recherche d'un équivalent de x_n.

1) Justifier le développement limité :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad , \{x \to 0\}$$

On note pour tout n :

$$r_n = \sup_{k \geqslant n} |x_k|.$$

2) Montrer :

$$x_{n+2} - \tfrac{1}{4}x_{n+1} - \tfrac{1}{4}x_n = y_n \quad \text{où} \quad y_n = -\tfrac{1}{16}(x_n^2 + x_{n+1}^2) + o(r_n^2).$$

3)a) Exprimer la racine négative λ et la racine positive μ de $X^2 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{4}$ à l'aide de la fonction « racine carrée ».
b) Montrer de préférence sans calculer de valeurs numériques approchées :

$$\tfrac{1}{2} < \mu < \tfrac{2}{3}\,;\ \mu^3 < |\lambda| < \mu^2.$$

On pose :

$$x_{n+1} - \lambda x_n = z_n.$$

4) Montrer $z_{n+1} - \mu z_n = y_n$.

5)a) Montrer : $y_n = \mathcal{O}((1/2)^n)$.
b) Montrer : $z_n = a\mu^n + o(\mu^n)$ pour un certain réel a.
c) Montrer : $x_n = \frac{4a}{\sqrt{17}}\mu^n + o(\mu^n)$.

6) On traite maintenant le cas $a = 0$, donc $z_n = o(\mu^n)$ et $x_n = o(\mu^n)$.

a) Montrer : $y_n = o((\mu^2)^n)$.
b) Montrer : $z_n = o((\mu^2)^n)$.
c) Montrer : $x_n = o((\mu^2)^n)$.
d) Montrer : $y_n = o((\mu^4)^n)$.
e) Montrer : $z_n = o((\mu^4)^n)$.

f) Montrer : $x_n = c\lambda^n + o((\mu^4)^n)$ pour un certain réel c.

Ainsi ou bien $x_n \sim b\mu^n$ pour un certain $b \neq 0$ ou bien $x_n \sim c\lambda^n$ pour un certain $c \neq 0$ ou bien $x_n = o((\mu^4)^n)$.

Il resterait à établir que le premier cas correspond à (R+) ou (R-), le deuxième cas à (S), le troisième cas étant impossible si la suite U n'est pas constante.