Correction Agrèg interne ep1 2020

Partie 1

1. $\forall j \in [[1,n]]$, la famille $(e_1, ..., e_{j+1})$ est libre car c'est une sous famille de la base $(e_1, ..., e_n)$. Donc $e_{j+1} \notin Vect(e_1, ..., e_j)$ donc $Vect(e_1, ..., e_j) \subsetneq Vect(e_1, ..., e_{j+1})$ donc $E_j \subsetneq E_{j+1}$.

   donc $\{0\} \subsetneq E_1 \subsetneq ... \subsetneq E_n$ donc la famille $(E_j)_{0 \leq j \leq n}$ est un drapeau total.

2. On a $\{0\} \subsetneq E_1 \subsetneq ... \subsetneq E_n = E$.

   $\forall j \in [[1,n]], \dim E_{j+1} - \dim E_j \geq 1$

   Et $\sum_{j=0}^{n-1} (\dim E_{j+1} - \dim E_j) = \dim E_n - \dim E_0 = n$

   Donc $\forall j \in [[1,n]], \dim E_{j+1} - \dim E_j = 1$.

   On a $\dim E_1 = 1$ on choisit $e_1 \in E_1 \setminus \{0_E\}$ et $E_1 = Vect(e_1)$.

   Ensuite $\dim E_2 = 2$ donc on choisit e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de E_2.

   Ainsi de suite, pour tout j dans $[[2,n]]$ on utilise le thèorème de la base incomplète pour compléter la base de $E_j = (e_1, ..., e_j)$ en $(e_1, ..., e_{j+1})$. Et on obtient une base adaptée au drapeau.

3. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base adaptée au drapeau total.

   Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt nous donne une base orthonormée $(f_1, ..., f_n)$ vérifiant $\forall j \in [[1,n]], Vect(f_1, ..., f_j) = Vect(e_1, ..., e_j) = E_j$. Donc c'est une base orthonormée adaptée au drapeau total.

4. u diagonalisable donc il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. Notons pour tout $j \in [[1,n]], E_j = vect(e_1, ..., e_j)$.

   Alors $(E_j)_{0 \leq j \leq n}$ est un drapeau total.

   De plus $\forall j \in [[1,n]], u(e_j) \in \mathbf{K} e_j$ (car e_j est un vecteur propre)

   Donc $\forall j \in [[1,n]], u(e_j) \in E_j$

   Donc $\forall j \in [[1,n]], \forall k \in [[1,j]], u(e_k) \in E_k \subset E_j$

   Finalement, $u(E_j) = u(vect(e_1, ..., e_j)) \subset E_j$ donc ce drapeau est stable par u.

5.

   (a) Soit x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Soit $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbf{K}$ tel que

   $$a_0 x + a_1 u(x) + ... + a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E$$

   On applique u^{n-1} à cette égalité, on obtient $a_0 u^{n-1}(x) = 0_E$ donc $a_0 = 0$. Par récurrence, si on suppose que $a_0 = a_1 = ... = a_j = 0$ alors en appliquant u^{n-j} on obtient $a_{j+1} u^{n-1}(x) = 0_E$ et donc $a_{j+1} = 0$. Finalement, la famille $\left(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ est libre et donc toute sous famille est libre également.

   (b) Soit $i \in [[1, n-1]]$ et $y \in \ker u^i$ alors $u^{i+1}(y) = u\left(u^i(y)\right) = u(0) = 0$ donc $y \in \ker u^{i+1}$. On a donc $\ker u^i \subset \ker u^{i+1}$.

   Supposons $\ker u^i = \ker u^{i+1}$

   Si $z \in \ker u^m$ avec $m \geq i$ alors $u^{m-i-1}(z) \in \ker u^{i+1} = \ker u^i$ donc $u^i\left(u^{m-i-1}(z)\right) = 0_E$ donc $u^{m-1}(z) = 0_E$. On en déduit $\ker u^m = \ker u^{m-1}$. En itérant, on obtient $\forall m \geq i, \ker u^m = \ker u^i$.

   Or, $\ker u^n = E$ et $\ker u^i \neq E$ car $u^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ donc notre hypothèse et absurde et $\ker u^i \subsetneq \ker u^{i+1}$.

   Donc la famille $\left(\ker u^i\right)_{0 \leq i \leq n}$ est un drapeau total de E.

   $\forall i \in [[1,n]], \forall y \in \ker u^i, u^i(u(y)) = u\left(u^i(y)\right) = u(0_E) = 0_E$ donc $u(y) \in \ker u^i$. et donc ce drapeau est stable par u.

   La famille $\left(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x)\right)$ est une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n c'est donc une base.

De plus, si on note $e_j = u^{n-j}(x)$

On a $u(e_1) = u^n(x) = 0_E$, $u^2(e_2) = 0_E, u^3(e_3) = 0_E$ et $\forall j \in [[1,n]], u^j(e_j) = u^n(x) = 0_E$.

$\forall j \in [[1,n]], \forall k \in [[1,j]], u^j(e_k) = u^{j-k}\left(u^k(e_k)\right) = u^{j-k}(0_E) = 0_E$.

Donc $\forall j \in [[1,n]], vect(e_1, ..., e_j) \subset \ker u^j$ or ces deux espaces sont de la même dimension j donc ils sont égaux et la base $(e_1, ..., e_n)$ est adaptée au drapeau $\left(\ker u^i\right)_{0 \leq i \leq n}$.

6. Supposons qu'il existe un drapeau total stable par u et notons $(e_1, ..., e_n)$ une base de E adaptée à ce drapeau.
   $\forall j \in [[1,n]], u(vect(e_1, ..., e_j)) \subset vect(e_1, ..., e_j)$
   En particulier,$\forall j \in [[1,n]], u(e_j) \in vect(e_1, ..., e_j)$ donc la matrice de u dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est triangulaire supérieure. Donc u est trigonalisable.
   Réciproquement, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base qui trigonalise u. Et soit $(E_j)_{0 \leq j \leq n}$ le drapeau total défini par $E_j = vect(e_1, ..., e_j)$.
   Comme la matrice de u dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est triangulaire supérieure, on a $\forall i \in [[1,n]], u(e_i) \in vect(e_1, ..., e_i)$ et donc $u(E_j) \subset E_j$. Donc ce drapeau est stable par u.

7. Si u est trigonalisable il existe un drapeau total stable par u, et comme E est euclidien, on peut trouver une base orthonormée qui est adaptée à ce drapeau et donc il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Partie II

8. Soit $H \lhd G$.
   (a) Montrons que $\star$ est bien définie
   C'est à dire que si $g_1H = k_1H$ et $g_2H = k_2H$ alors $g_1g_2H = k_1k_2H$.
   Supposons $k_1^{-1}g_1 \in H$ et $k_2^{-1}g_2 \in H$
   Comme H est distingué $k_2^{-1}\left(k_1^{-1}g_1\right)k_2 \in H$
   donc $\left(k_2^{-1}k_1^{-1}g_1k_2\right)\left(k_2^{-1}g_2\right) \in H$
   donc $k_2^{-1}k_1^{-1}g_1g_2 \in H$
   donc $(k_1k_2)^{-1}(g_1g_2) \in H$
   Et $\star$ est bien définie.
   Montrons que $\star$ est associative.
   $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$,
$$\begin{aligned}(g_1H) \star ((g_2H) \star (g_3H)) &= (g_1H) \star (g_2g_3H) \\ &= g_1(g_2g_3)H = (g_1g_2)g_3H \\ &= (g_1g_2H) \star (g_3H) \\ &= ((g_1H) \star (g_2H)) \star (g_3H)\end{aligned}$$
   $\forall g \in G, (gH) \star (1_GH) = g.1_GH = gH = (1_GH) \star (gH)$ donc $1_GH = H$ est un élément neutre.
   $\forall g \in G, (gH) \star \left(g^{-1}H\right) = 1_GH = H$ et $\left(g^{-1}H\right) \star (gH) = H$ donc $g^{-1}H$ est le symétrique de gH.
   Donc $(G/H, \star)$ est un groupe.
   (b) La surjectivité est évidente par construction.
   $\forall g_1, g_2 \in G, \pi(g_1g_2) = g_1g_2H = (g_1H) \star (g_2H) = \pi(g_1) \star \pi(g_2)$.
   Donc π est un morphisme de groupe surjectif.

9. Notons que si $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j})$ sont trois matrices de $T_n^+(\mathbf{K})$ et si $C = AB$ alors $\forall i \in [[1,n]], c_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$.
   (a)
   - La matrice $I_n \in TU_n^+(\mathbf{K})$.
   - Soit $A, B \in TU_n^+(\mathbf{K})$. Notons $C = (c_{i,j}) = AB$.
     On a , $\forall i \in [[1,n]], a_{i,i} = b_{i,i} = 1$ donc $\forall i \in [[1,n]], c_{i,i} = 1$.
     Donc $TU_n^+(\mathbf{K})$ est stable par multiplication.
   - Soit $A \in TU_n^+(\mathbf{K})$ soit $B = (b_{i,j})$ l'inverse de A dans $T_n^+(\mathbf{K})$.
     On a$\forall i \in [[1,n]], a_{i,i} = 1$ et $\forall i \in [[1,n]], a_{i,i}b_{i,i} = 1$.
     Donc $B \in TU_n^+(\mathbf{K})$

   Finalement, $TU_n^+(\mathbf{K})$ est un sous-groupe de $T_n^+(\mathbf{K})$.
   Soit $A = (a_{i,j}) \in TU_n^+(\mathbf{K})$ et $P = (p_{i,j}) \in T_n^+(\mathbf{K})$. Notons $D = (d_{i,j}) = P^{-1}AP \in T_n^+(\mathbf{K})$.
   $\forall i \in [[1,n]], d_{i,i} = \frac{1}{p_{i,i}}a_{i,i}p_{i,i} = a_{i,i} = 1$. Donc $P^{-1}AP \in TU_n^+(\mathbf{K})$.
   Donc $TU_n^+(\mathbf{K}) \lhd T_n^+(\mathbf{K})$.

(b) Il existe des matrices trigonalisables non-triangulaires.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \notin TU_n^+(\mathbf{K}). \end{aligned}$$

donc $TU_n^+(\mathbf{K})$ n'est pas un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbf{K})$ pour $n > 1$.

10. Il existe un élément $g_0 \in G$ tel que $\forall x \in G, x \in H$ ou $x \in g_0H$.

Si $x \in H, \forall h \in H, x^{-1}hx \in H$.

Si $x \in g_0H$, notons $x = g_0k$ avec $k \in H$.

$\forall h \in H, x^{-1}hx = k^{-1}g_0^{-1}hg_0k$.

Pour avoir $x^{-1}hx \in H$ il suffit de montrer que $g_0^{-1}hg_0 \in H$.

Or $\forall h \in H, hg_0 \in G$ donc

- soit $hg_0 \in H$ mais alors $g_0 \in H$ ce qui n'est pas possible car on doit avoir $g_0H \neq H$.
- soit $hg_0 \in g_0H$ donc $g_0^{-1}hg_0 \in H$.

Donc $H \lhd G$.

Preuve alternative (Merci à Maximilien Chapuy) :

$\forall g \in G$ si $g \notin H$ alors $G = H \cup gH$, en effet $gH \neq H$ il n'y a que deux classes.

Par ailleurs, $Hg \cap H = \emptyset$ car $g \notin H$. Donc $Hg \subset gH$ or ces deux ensembles ont le même cardinal donc ils sont égaux.

Ainsi, $\forall g \in G, Hg = gH$, donc $H \lhd G$.

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) $A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Donc $A^{-1} = A^3 \in \Delta$ et $\forall n \in \mathbf{N}, A^n = A^q$ où q est le reste de la division de n par 4 et $A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = A^{3n} \in \Delta$.

Donc $\forall n \in \mathbf{Z}, A^n \in \Delta$.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

Donc $B^{-1} = B$ et $\forall n \in \mathbf{Z}, B^{2n} = I_2$ et $B^{2n+1} = B$. Donc $\forall n \in \mathbf{Z}, B^n \in \Delta$.

$BA = A^3B \in \Delta$; $BA^2 = A^3BA = A^6B = A^2B \in \Delta$; $BA^3 = A^3BA^2 = A^6BA = A^2BA = A^5B = AB \in \Delta$.

$(AB)A = A(BA) = A^4B = B \in \Delta$

$(AB)A^2 = BA \in \Delta$; $(AB)A^3 = BA^2 \in \Delta$.

Ainsi de suite on montre aisément que Δ est stable par mutiplication et par inverse.

Donc Δ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbf{R})$.

(b) $R = \{I_2, B\}$ car $B^2 = I_2$.

$\Delta = \langle A \rangle \cup \langle A \rangle B$ d'après la question 10. $\langle A \rangle \lhd \Delta$. Donc Δ/Γ est un groupe à deux éléments.

Considérons $\varphi : R \to \Delta/\Gamma$ la restriction de π à R. C'est un morphisme de groupe car π est un morphisme et φ est bijective.

Donc Δ/Γ et R sont isomorphes.

(c) Γ est commutatif et R est commutatif (comme tous les groupes engendrés par un seul élément). Donc $\Gamma \times R$ est commutatif mais Δ ne l'est pas ($BA \neq AB$). Donc $\Gamma \times R$ et Δ ne sont pas isomorphes.

12.

(a) $HgK = \bigcup_{h \in H} hgK = \bigcup_{k \in K} Hgk$.

(b) On a $G = \bigcup_{g \in G} HgK$ car $g \in HgK$ en prenant l'élément neutre de chaque côté.

Il suffit donc de démontrer que $\forall g, g' \in G$ on a soit $HgK \cap Hg'K = \emptyset$ soit $HgK = Hg'K$.

Suposons qu'il existe $x \in HgK \cap Hg'K$ donc $x = hgk = h^{'}g'k'$ avec $h, h' \in H$ et k, k' dans K.

Donc $g = h^{-1}h^{'}g'k'k^{-1} \in Hg'K$ donc $HgK \subset Hg'K$ de même par le raisonnement symétrique on a $Hg'K \subset HgK$. Donc $Hg'K = HgK$.

Partie III

13.

(a) $P_{(1,2,\dots,n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $\forall i \in [[1, n]]\,, u_\sigma \circ u_\tau (\varepsilon_i) = u_\sigma \left(\varepsilon_{\tau(i)}\right) = \varepsilon_{\sigma\circ\tau(i)}$

Donc les endomorphismes $u_\sigma \circ u_\tau$ et $u_{\sigma\circ\tau}$ coïncident sur la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ donc ils sont égaux.

Donc $\underline{P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}}$. On en déduit $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Et si $\sigma = c_1...c_k$ alors $P_\sigma = P_{c_1}...P_{c_k}$.

(c) $P_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$ car les vecteurs colonnes de P_σ forment une base orthonormée, c'est la base canonique dans un certain ordre.

(d) Montrons que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \det P_\sigma = sig(\sigma)$ où $sig(\sigma)$ désigne la signature de σ. Or $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\det P_\sigma = \det\left(\varepsilon_{\sigma(1)}, ..., \varepsilon_{\sigma(n)}\right) = sig(\sigma) \det(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = sig(\sigma)\,.$$

car le déterminant est une n-forme alternée.

Donc $P_\sigma \in SO_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma \in \mathrm{A}_n$.

14.

(a) $T_{i,j}(\lambda) A = A + \lambda E_{i,j} A$ et $E_{i,j} A$ est une matrice dont seule le ligne i est non nulle et elle est égale à la j^e ligne de A.

Donc $T_{i,j}(\lambda) A$ s'obtient à partir de A en faisant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

(b) $D_i(\lambda) A$ s'obtient à partir de A en faisant $L_i \leftarrow \lambda L_i$

$AT_{i,j}(\lambda)$ s'obtient à partir de A en faisant $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

car ${}^t(AT_{i,j}(\lambda)) = {}^t T_{i,j}(\lambda)^t A = T_{j,i}(\lambda)^t A$.

$AD_i(\lambda)$ s'obtient à partir de A en faisant $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

(c) Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$ dont la matrice dans la base canonique est A
Notons $C_1, ..., C_n$ les vecteurs colonnes de A.
En supposant $i < j$, les vecteurs colonnes de $AP_{i,j}$ sont $u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_j) ..., u(\varepsilon_i), ..., u(\varepsilon_n) = C_1, ..., C_j, ..., C_i, ...C_n$
Donc $AP_{i,j}$ s'obtient à partir de A en intervertissant les colonnes C_i et C_j.
Astuce ${}^tP_{i,j} = P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$ car $P_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$.
$P_{i,j}A = {}^t P_{i,j}A = {}^t({}^tAP_{i,j})$
Donc $P_{i,j}A$ s'obtient à partir de A en intervertissant les lignes L_i et L_j.
Donc AP_σ s'obtient à partir de A en appliquant la permutation σ à ses vecteurs colonnes. Et $P_\sigma A$ s'obtient à partir de A en appliquant la permutation σ à ses vecteurs lignes.

Pour comprendre ce que signifient ces phrases il peut être utile de regarder sur un exemple.

Si $P_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_{(132)}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{\sigma^{-1}(1)} \\ L_{\sigma^{-1}(2)} \\ L_{\sigma^{-1}(3)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AP_{(132)} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{pmatrix} \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & C_{\sigma(2)} & C_{\sigma(3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Notons $V = (v_{i,j})$ donc si $i > j$,$v_{i,j} = 0$ et $v_{i,i} \neq 0$.
De même on note $U = (u_{i,j})$.
On a $P_\sigma = (p_{i,j})$ où $p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$
Calculons c le coefficient $(\sigma(j), j)$ de $P_\sigma V$.
$c = \sum_{k=1}^n p_{\sigma(j),k} v_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{\sigma(j),\sigma(k)} v_{k,j} = v_{j,j} \neq 0$.
Calculons d le coefficient $(\sigma(j), j)$ de $UP_{\sigma'}$.
$d = \sum_{k=1}^n u_{\sigma(j),k} \delta_{k,\sigma'(j)} = u_{\sigma(j),\sigma'(j)}$.
Si $P_\sigma V = UP_{\sigma'}$ alors $u_{\sigma(j),\sigma'(j)} \neq 0$ donc $\sigma'(j) \geq \sigma(j)$.
On a montré que $\forall j \in [[1, n]], \sigma'(j) \geq \sigma(j)$.
Or,$\sum_{j=1}^n \sigma'(j) = \sum_{j=1}^n j = \sum_{j=1}^n \sigma(j)$ donc $\forall j \in [[1, n]], \sigma'(j) = \sigma(j)$.

16. ($T_{i,j}(\lambda) A$ s'obtient à partir de A en faisant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$)

(a) Posons $A = (a_{i,j})$. Soit k tel que $a_{k,1} \neq 0$ et $\forall i > k, a_{i,1} \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{k,1} & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$B = T_{k-1,k}\left(-\frac{a_{k-1,1}}{a_{k,1}}\right) \times \cdots \times T_{2,k}\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{k,1}}\right) T_{1,k}\left(-\frac{a_{1,1}}{a_{k,1}}\right) A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{k,1} & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Tous les termes de la première colonne sont nuls sauf $a_{k,1}$.
On choisit $l = \max\{i \in [[1, n]] \setminus \{k\}, a_{i,2} \neq 0\}$, en multipliant à gauche par la transvection $T_{i,l}\left(-\dfrac{a_{i,2}}{a_{l,2}}\right)$ (pour $i \neq k$) on remplace le coefficient $a_{i,2}$ par 0. Et donc on peut obtenir une matrice qui a $n-2$ lignes qui commencent par deux coefficients nuls et une ligne qui commence par un 0.

Ainsi de suite, en multipliant par des transvections $T_{i,l}(\lambda)$ on va finir par obtenir une matrice dont les lignes sont échelonnées. C'est-à-dire qu'une ligne à un coefficient non-nul sur la première colonne, une ligne commence par un coefficient nul, une ligne commence par deux coefficients nuls etc. Une ligne a tous ses coefficients nuls sauf le dernier.

Et donc en permutant convenablement les lignes (en multipliant par une matrice P_τ bien choisie) on obtient une matrice triangulaire supérieure.

Finalement, si on note T le produit de toutes les transvections, alors on a bien $T \in TU_n^+$ et $P_\tau TA = V$: triangulaire supérieure

Et donc en notant $U = T^{-1}$ et $\sigma = \tau^{-1}$ on a

$$A = UP_\sigma V$$

avec $U \in TU_n^+$.

(b) Soit $A \in Gl_n(\mathbf{K})$, supposons que l'on a $A = UP_\sigma V = U'P_{\sigma'}V'$ avec $U, U' \in TU_n^+$ et $V, V' \in T_n^+$. On a

$$VV'^{-1} = P_\sigma^{-1}U^{-1}U'P_{\sigma'}$$

Et $VV'^{-1} \in T_n^+$ et $U^{-1}U' \in T_n^+$ donc la question 15 nous dit que $\sigma = \sigma'$.

17. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si $c = 0$ alors la décomposition de Bruhat de A est $A = I \times P_{id} \times A$

Si $c \neq 0$, $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\delta c & b+\delta d \\ c & d \end{pmatrix}$

On choisit $\delta = -\dfrac{a}{c}$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b - \frac{ad}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

En mupltipliant par $P_{1,2}$ on obtient

$$P_{1,2}\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & \frac{bc-ad}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -\frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

et finalement

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_{1,2} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -\frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

18.

(a) Si A satisfait (E_1) alors A est le produit de deux matrices inversibles donc elle est inversible.

Si A satisfait (E_2), le mineur $n \times n$ est le déterminant de A donc si il est non-nul, la matrice A est inversible.

(b) On note $0_{i,j}$ la matrice nulle de $M_{i,j}(\mathbf{C})$,

$\forall A, A' \in M_k(\mathbf{C}), \forall C, C' \in M_{n-k}(\mathbf{C}), \forall B \in M_{n-k,k}(\mathbf{C}), \forall B' \in M_{k,n-k}(\mathbf{C})$, on a

$$\begin{pmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0_{n-k,k} & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' \\ BA' & BB'+CC' \end{pmatrix}$$

Si A et A' sont inversible alors le mineur d'ordre k de $\begin{pmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0_{n-k,k} & C' \end{pmatrix}$ est non-nul.

Si $T \in T_n^-(\mathbf{C})$, on peut écrire $T = \begin{pmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ B & C \end{pmatrix}$ avec A inversible car tous les éléments de sa diagonale principale sont non-nuls

Si $T' \in T_n^+(\mathbf{C})$, on peut écrire $T' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0_{n-k,k} & C' \end{pmatrix}$ avec A' inversible car tous les éléments de sa diagonale principale sont non-nuls.

Et donc le mineur d'ordre k de TT' est non-nul. Et c'est vrai pour toutes les valeurs de k. Donc TT' satisfait (E_2).

(c) Si $n=1$ c'est évident.

Supposons le résultat vrai pour tous les entiers $< n$. Et soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ dont tous les mineurs principaux sont non-nuls.

Notons B la matrice extraite de A en prenant les $n-1$ premières lignes et $n-1$ premières colonnes. Donc tous les mineurs principaux de B sont non nuls. Donc on peut écrire $B = TT'$ avec $T \in T_n^-(\mathbf{C})$ et $T' \in T_n^+(\mathbf{C})$

Donc $A = \begin{pmatrix} TT' & C \\ L & a_{n,n} \end{pmatrix}$ avec $L \in M_{1,n-1}(\mathbf{C})$ et $C \in M_{n-1,1}(\mathbf{C})$

On a le produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ X & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T' & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TT' & TY \\ XT' & \alpha + XY \end{pmatrix}$$

Si on pose $X = LT'^{-1}$ et $Y = T^{-1}C$ on obtient

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ LT'^{-1} & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T' & T^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TT' & C \\ L & \alpha + LT'^{-1}T^{-1}C \end{pmatrix}$$

Et donc si on choisit $\alpha = a_{n,n} - LT'^{-1}T^{-1}C$ alors

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ LT'^{-1} & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T' & T^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

et donc A satisfait (E_2). Ce qui permet de conclure la récurrence.

19. Soit $\varphi_k : M_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ qui a une matrice associe son mineur principal d'ordre k. Alors φ_k est une fonction polynomiale à plusieurs variables appliquée aux coefficients de A.

Donc φ_k est continue. Et ainsi,$\varphi_k^{-1}(\mathbf{C}^*)$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{C})$.

Une matrice A satisfait (E_2) si et seulement si elle appartient à $\bigcap\limits_{k\in[[1,n]]} \varphi_k^{-1}(\mathbf{C}^*)$.

Comme une intersection finie d'ouverts est un ouvert. L'ensembles des matrices qui vérifient la condition (E_2) est un ouvert.

20. Remarque $\tau^{-1} = \tau$ car $\forall k \in [[1,n]], \tau \circ \tau(k) = \tau(n-k+1) = n-(n-k+1)+1 = k$.

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{2,2} & \times & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times & \times \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbf{C})$.

Alors $P_\tau(A) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \\ \vdots & 0 & / & / & \times \\ \vdots & / & / & \times & \times \\ 0 & a_{2,2} & \times & \times & \times \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \times & \times & \times \end{pmatrix}$ et donc

$P_\tau(A)P_\tau = \begin{pmatrix} a_{n,n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \times & \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \times & a_{2,2} & 0 \\ \times & \times & \times & a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix} \in T_n^-(\mathbf{C})$.

Donc $P_\tau T_n^+(\mathbf{C}) P_\tau \subset T_n^-(\mathbf{C})$. Comme $P_\tau^{-1} = P_{\tau^{-1}} = P_\tau$ Alors quelque soit $T \in T_n^-(\mathbf{C})$ on a $T = P_\tau(P_\tau T P_\tau)P_\tau$ et $P_\tau T P_\tau = P_\tau^{-1} T P_\tau^{-1} \in T_n^+(\mathbf{C})$ en inversant le calcul précédent.

Donc $P_\tau T_n^+(\mathbf{C}) P_\tau = T_n^-(\mathbf{C})$.

(b) $P_\tau T_n^+(\mathbf{C}) P_\tau T_n^+(\mathbf{C}) = T_n^-(\mathbf{C}) T_n^+(\mathbf{C})$ qui est l'ensemble des matrices qui vérifient (E_1). C'est donc l'ensemble des matrices qui vérifient (E_2) (question 18.b.) et donc c'est un ouvert (question 19.).

(c) $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})\,P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est l'ensemble des matrices qui vérifient (E_2).
Soit $A \in GL_n(\mathbf{C})$, et $k \in [[1,n]]$, supposons que le mineur principal d'ordre k de A soit nul. Alors le mineur principal de $A - \frac{1}{p} I_n$ est une expression de la forme

$$\frac{a_k p^k + a_{k-1}p^{k-1} + \cdots + a_0}{p^k}$$

où les coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_k$ sont des expressions polynomiales en les coefficients de A.
Or un polynôme de degré k admet au maximum k racines donc pour p suffisamment grand ce mineur est non nul. Donc $\varphi_k^{-1}(\mathbf{C}^*)$ est un ouvert dense de $GL_n(\mathbf{C})$.
Comme une intersection finie d'espace dense est dense on a que l'ensemble des matrices qui vérifient (E_2) est dense.

(d) L'application $A \to P_\tau A$ est continue (on change l'ordre des lignes) et est égale à sa réciproque car $P_\tau^2 = I_n$. Donc c'est un homéomorphisme.

(e) $T_n^+(\mathbf{C})\,P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est l'image de $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})\,P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ par l'homéomorphisme de la question précédente. Donc comme $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})\,P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est un ouvert dense, $T_n^+(\mathbf{C})\,P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ également.
$\bigcup\limits_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n \\ \sigma\neq\tau}} T_n^+(\mathbf{C})\,P_\sigma T_n^+(\mathbf{C}) = GL_n(\mathbf{C}) \setminus T_n^+(\mathbf{C})\,P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ c'est donc un fermé d'intérieur vide.

PARTIE IV

21. $\forall g \in GL(E)$, la famille $(g(e_i))_{i\in[[1,n]]}$ est une base.
Si $g = id_E, g.(e_i)_{i\in[[1,n]]} = (e_i)_{i\in[[1,n]]}$

$$\begin{aligned}\forall g,h &\in GL(E), h.\left(g.(e_i)_{i\in[[1,n]]}\right) = h.(g(e_i))_{i\in[[1,n]]} = (h(g(e_i)))_{i\in[[1,n]]} \\ &= (h\circ g(e_i))_{i\in[[1,n]]} = (h\circ g).(e_i)_{i\in[[1,n]]}\end{aligned}$$

Donc, on a bien une action de groupe de $GL(E)$ sur Δ.
Soit $(e_i)_{i\in[[1,n]]} \in \Delta$, si $g.(e_i)_{i\in[[1,n]]} = (e_i)_{i\in[[1,n]]}$ alors $\forall i \in [[1,n]], g(e_i) = e_i$ donc $g = id$.
Donc $\mathrm{Stab}_{(e_i)_{i\in[[1,n]]}} = \{id_E\}$ donc l'intersection de tous les stabilisateurs est $\{id_E\}$ et l'action est fidèle.
Soit $(e_i)_{i\in[[1,n]]}$ et $(f_i)_{i\in[[1,n]]}$ deux éléments de Δ, alors il existe une application linéaire u telle que $\forall i \in [[1,n]], u(e_i) = f_i$. Et comme l'image d'une base est une base $u \in GL(E)$. Donc l'action est transitive.

22. Soit $(E_i)_{i\in[[1,n]]}$ un drapeau total. Pour tout $g \in GL(E)$, $\dim g(E_i) = \dim(E_i) = i$ et $\forall i \in [[0,n-1]], E_i \subset E_{i+1}$ donc $\forall i \in [[0,n-1]], g(E_i) \subset g(E_{i+1})$ et l'inclusion est stricte car $\dim g(E_{i+1}) = i+1 > i = \dim g(E_i)$.
Donc $(g(E_i))_{i\in[[1,n]]}$ est un drapeau.
Si $g = id$ alors $g.(E_i)_{i\in[[1,n]]} = (E_i)_{i\in[[1,n]]}$

$$\begin{aligned}\forall g,h &\in GL(E), h.\left(g.(E_i)_{i\in[[1,n]]}\right) = h.(g(E_i))_{i\in[[1,n]]} = (h(g(E_i)))_{i\in[[1,n]]} \\ &= (h\circ g(E_i))_{i\in[[1,n]]} = (h\circ g).(E_i)_{i\in[[1,n]]}\end{aligned}$$

Donc on a bien une action de $GL(E)$ sur $\mathcal{D}$.
Soient $(E_i)_{i\in[[1,n]]}$ et $(F_i)_{i\in[[1,n]]}$ deux drapeaux totaux alors il existe deux bases $(e_i)_{i\in[[1,n]]}$ et $(f_i)_{i\in[[1,n]]}$ telles que $(E_i)_{i\in[[1,n]]} = \delta\left((e_i)_{i\in[[1,n]]}\right)$ et $(F_i)_{i\in[[1,n]]} = \delta\left((f_i)_{i\in[[1,n]]}\right)$ (question 2.)
Soit $u \in L(E)$, telle que $\forall i \in [[1,n]], u(e_i) = f_i$ donc $u \in GL(E)$ et on a alors
$\forall k \in [[1,n]], u(\mathrm{Vect}(e_1,...,e_k)) = \mathrm{Vect}(f_1,...,f_k)$ et donc
$\forall k \in [[1,n]], u(E_k) = F_k$ et donc $u.\left((E_i)_{i\in[[1,n]]}\right) = (F_i)_{i\in[[1,n]]}$. Finalement, l'action est transitive.

$\forall B = (e_i)_{i\in[[1,n]]} \in \Delta, \forall g \in GL(E)$

$$\begin{aligned}
\delta(g.B) &= \delta\left(g.(e_i)_{i\in[[1,n]]}\right) = \delta\left((g(e_i))_{i\in[[1,n]]}\right)\\
&= (\mathrm{Vect}(g(e_1),...,g(e_i)))_{i\in[[1,n]]}\\
&= (g(\mathrm{Vect}(e_1,...,e_i)))_{i\in[[1,n]]} \text{ car } g \text{ est inversible.}\\
&= g.(\mathrm{Vect}(e_1,...,e_i))_{i\in[[1,n]]} = g.\delta(B).
\end{aligned}$$

23. $\forall g \in GL(E), g.\delta(B_0) = \delta(B_0)$ si et seulement si $\forall k \in [[1,n]], g(\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)$ ce qui équivaut à dire que la matrice de g dans la base $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ est triangulaire supérieure.

    Donc $\mathrm{Stab}_{\delta(B_0)} = T_n^+(\mathbf{K})$.

24. $\forall M \in GL_n(\mathbf{K}), M^{-1}M = I_n \in T_n^+(\mathbf{K})$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

    $\forall M, N \in GL_n(\mathbf{K})$, si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbf{K})$ alors $\left(M^{-1}N\right)^{-1} = N^{-1}M \in T_n^+(\mathbf{K})$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

    $\forall M, N, P \in GL_n(\mathbf{K})$, si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbf{K})$ et $P^{-1}M \in T_n^+(\mathbf{K})$ alors $P^{-1}M \times M^{-1}N = P^{-1}N \in T_n^+(\mathbf{K})$ donc $\mathcal{R}$ est transitive.

    Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

25.

    (a) Soient $M, N \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que $\bar{M} = \bar{N}$ c'est à dire telles que $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbf{K})$.
    Il faut montrer que $M.\delta(B_0) = N.\delta(B_0)$
    Or, $M^{-1}N \in \mathrm{Stab}_{\delta(B_0)}$ donc $\left(M^{-1}N\right).\delta(B_0) = \delta(B_0)$ donc $M^{-1}.(N.\delta(B_0)) = \delta(B_0)$
    Donc $N.\delta(B_0) = M.\delta(B_0)$ et $\varphi\left(\bar{M}\right) = \varphi\left(\bar{N}\right)$. Donc φ est bien définie.

    (b) Soient $M, N \in GL_n(\mathbf{K})$ si $\varphi\left(\bar{M}\right) = \varphi\left(\bar{N}\right)$ alors $M.\delta(B_0) = N.\delta(B_0)$ mais alors $\left(M^{-1}N\right).\delta(B_0) = \delta(B_0)$ donc $M^{-1}N \in \mathrm{Stab}_{\delta(B_0)} = T_n^+(\mathbf{K})$ donc $M\mathcal{R}N$ donc $\bar{M} = \bar{N}$. Donc φ injective.
    L'action de $GL_n(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{D}$ est transitive, donc $\forall (E_i)_{i\in[[1,n]]} \in \mathcal{D}, \exists M \in GL_n(\mathbf{K}), M.\delta(B_0) = (E_i)_{i\in[[1,n]]}$ donc φ est surjective.
    Finalement, φ est bijective.

26. $\forall X, Y \in GL_n(\mathbf{K}), \varphi\left(\overline{XY}\right) = XY.\delta(B_0) = X.(Y.\delta(B_0)) = X.\varphi\left(\bar{Y}\right)$.

27. $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) = X.\left(\overline{I_n}, \overline{X^{-1}Y}\right)$ Appliquons la décomposition de Bruhat à $X^{-1}Y$

    Donc il existe $T_1 \in TU_n^+(\mathbf{K}), P_\sigma$: matrice de permutation et $T \in T_n^+(\mathbf{K})$ tels que

    $$X^{-1}Y = T_1 P_\sigma T$$

    Donc $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) = X.\left(\overline{I_n}, \overline{T_1 P_\sigma T}\right)$.
    Or $\overline{I_n} = \overline{T_1}$ car $I_n \mathcal{R} T_1$. Donc $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) = X.\left(\overline{T_1}, \overline{T_1 P_\sigma T}\right) = X.\left(T_1.\left(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma T}\right)\right) = XT_1.\left(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma T}\right)$.
    Et comme, $P_\sigma T \mathcal{R} P_\sigma$ on a $\overline{P_\sigma T} = \overline{P_\sigma}$ et finalement

    $$\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) = XT_1.\left(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}\right)$$

    Supposons $XT_1.\left(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}\right) = XT_1'.\left(\overline{I_n}, \overline{P_{\sigma'}}\right)$

    C'est à dire $\left(\overline{XT_1}, \overline{XT_1 P_\sigma}\right) = \left(\overline{XT_1'}, \overline{XT_1' P_{\sigma'}}\right)$ donc $\overline{XT_1 P_\sigma} = \overline{XT_1' P_{\sigma'}}$

    donc $XT_1 P_\sigma \mathcal{R} XT_1' P_{\sigma'}$ donc $(XT_1 P_\sigma)^{-1} XT_1' P_{\sigma'} \in T_n^+(\mathbf{K})$
    Donc $P_\sigma^{-1} T_1^{-1} T_1' P_{\sigma'} \in T_n^+(\mathbf{K})$ d'après la question 15. on a $\sigma = \sigma^{'}$.

28. Soit $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) \in GL_n(\mathbf{K}) / T_n^+(\mathbf{K}) \times GL_n(\mathbf{K}) / T_n^+(\mathbf{K})$ d'après la question précédente il existe une permutation σ unique telle que $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ soit dans l'orbite de $\left(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}\right)$.

    Supposons que $\left(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}\right)$ et $\left(\overline{I_n}, \overline{P_{\sigma'}}\right)$ soient dans la même orbite. Alors il existe $A \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A.\left(\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}\right) = \left(\overline{I_n}, \overline{P_{\sigma'}}\right)$ c'est à dire $\left(\overline{A}, \overline{AP_\sigma}\right) = \left(\overline{I_n}, \overline{P_{\sigma'}}\right)$

    Donc $A\mathcal{R}\mathcal{I}_n$ donc $A \in T_n^+(\mathbf{K})$ et $P_{\sigma'}^{-1}(AP_\sigma) \in T_n^+(\mathbf{K})$ donc d'après la question 15 on a $\sigma = \sigma^{'}$.
    Comme $\overline{P_\sigma} = \overline{P_{\sigma'}}$ si et seulement si $\sigma = \sigma'$ on peut conclure qu'il y a autant d'orbites que de permutation σ et donc il y en a $n!$

FIN