Correction Agrèg interne ep2 2018

Partie I : Quelques propriétés de la distance à un fermé

I- A : Généralités

Rappel sur la borne inf :
Soit X une partie minorée de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{R}, \forall x \in X, m \leq x$. On dit que m est un minorant de X. L'ensemble des minorants de X admet toujours un plus grand élément qu'on appelle la borne inférieure de X et qu'on note $\inf X$.
$\inf X$ est donc le plus grand minorant de X.
En pratique $I = \inf X$ ssi $\begin{cases} \forall x \in X, I \leq x \\ \text{et} \\ \forall J \in \mathbb{R}, J > I \Rightarrow \exists x \in X, x < J \end{cases}$

Caractérisation Soit $I = \inf X$ alors

- Soit $I \in X$ et $I = \min X$ donc I est le plus petit élément de X.
- Soit $I \notin X$ et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers I.

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}, I + \frac{1}{n+1} > I$ donc il existe $x_n \in X$ tel que $I \leq x_n < I + \frac{1}{n+1}$. Par théorème d'encadrement, la suite (x_n) converge vers I.

Propriétés : Si Y est une partie minorée de $\mathbb{R}$. Si $X \subset Y$ alors $\inf Y \leq \inf X$.
En effet, tout minorant de Y est un minorant de X donc $\inf Y$ est un minorant de X donc plus petit ou égal au plus grand des minorants de X.
Fin du rappel

1. Soit $x \in E, d_B(x) = \inf\{d(x,b), b \in B\}$ et $d_A(x) = \inf\{d(x,a), a \in A\}$.

   Si $A \subset B$ alors $\{d(x,a), a \in A\} \subset \{d(x,b), b \in B\}$ donc $d_B(x) \leq d_A(x)$.

2. **Rappel Adhérence :** Soit A une partie d'un espace métrique E alors on appelle adhérence de A et on note $\bar{A}$ le plus petit fermé de E qui contient A. Donc $A \subset \bar{A}$ et A est un fermé ssi $A = \bar{A}$. Les éléments de $\bar{A}$ sont les limites des suites convergentes d'éléments de A.

   Plus sioux : $x \in \bar{A}$ ssi $\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ ssi $\forall r > 0, \exists a \in A, d(x,a) < r$.

   Fin du rappel.

   Soit $x \in E, d_A(x) = 0 \Leftrightarrow d(x,A) = 0 \Leftrightarrow \inf\{d(x,a), a \in A\} = 0$.

   Donc il existe une suite d'éléments $a_n \in A, (d(a_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Donc il existe une suite d'éléments $a_n \in A$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Donc $x \in \bar{A}$.

   Réciproquement si $x \in \bar{A}$ alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

   Donc $(d(a_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Or, 0 est un minorant de l'ensemble $\{d(x,a), a \in A\}$. Donc $\inf\{d(x,a), a \in A\} = 0$. Donc $d_A(x) = 0$.

   Autre démonstration sans les suites :

   Soit

$$\begin{aligned} \forall x &\in E, d_A(x) = 0 \Leftrightarrow d(x,A) = 0 \Leftrightarrow \inf\{d(x,a), a \in A\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, 0 \leq d(x,a) \\ \text{et} \\ \forall r > 0, \exists a \in A, d(x,a) < r \end{cases} \Leftrightarrow \forall r > 0, \exists a \in A, d(x,a) < r \Leftrightarrow x \in \bar{A} \end{aligned}$$

3.

(a) $\forall x, y \in E, \forall a \in A, d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$
Donc $d_A(x) = \inf_{b\in A} d(x,b) \leq d(x,y) + d(y,a)$
Donc $d_A(x) - d(x,y) \leq d(y,a)$ donc $d_A(x) - d(x,y)$ est un minorant de $\{d(y,a), a \in A\}$ donc $d_A(x) - d(x,y) \leq \inf_{a\in A} d(y,a) = d_A(y)$
Finalement on a

$$d_A(x) \leq d(x,y) + d_A(y)$$

(b) D'après la question précédente $\forall x, y \in E, d_A(x) - d_A(y) \leq d(x,y)$.
On intervertissant x et y on obtient $\forall x, y \in E, d_A(y) - d_A(x) \leq d(y,x) = d(x,y)$.
Donc $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$ donc d_A est $1-$lipschitzienne.

4. Comme $A \subset \bar{A}$ on a $d_{\bar{A}} \leq d_A$ d'après la question **1.**

$\forall x \in E, \forall y \in \bar{A}, d_A(x) \leq d(x,y) + d_A(y) = d(x,y)$ d'après les questions précédentes. Donc $d_A(x)$ est un minorant de $\left\{d(x,y), y \in \bar{A}\right\}$, donc $d_A(x) \leq \inf_{y\in\bar{A}} d(x,y) = d\left(x, \bar{A}\right) = d_{\bar{A}}(x)$.

Finalement, $d_A = d_{\bar{A}}$.

5.

(a) Si $A = B$ alors $d_A = d_B$.
Réciproquement, si $A \neq B$ alors il existe $b \in B \backslash A$ ou il existe $a \in A \backslash B$.
Supposons que $\exists b \in B \backslash A$ alors $d(b,B) = 0$ et $d(b,A) \neq 0$ car $b \notin \bar{A} = A$. donc $d_B \neq d_A$. On conclut par contraposition.
Deuxième preuve : Si on suppose $d_A = d_B$.
Alors $x \in A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \Leftrightarrow d_A(x) = 0 \Leftrightarrow d_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in B$.

(b) On a $d_A = d_B \Leftrightarrow d_{\bar{A}} = d_{\bar{B}}$ d'après la question **4.**
Et d'après la question **5.a.** $d_{\bar{A}} = d_{\bar{B}} \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$. Finalement on a

$$d_A = d_B \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}.$$

6. **Rappel sur les compacts** :

Définition : Soit K un espace métrique. K est un compact ssi toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente.

Toute fonction continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et ses bornes sont atteintes.

Exemples : $[a,b]$ et plus généralement les parties fermées et bornées des evn de dimension finies.

fin du rappel

$\inf_{a\in A} \{d(x,a)\}$

Comme pour x fixé, $a \rightarrow d(x,a)$ est continue (cf *) alors si A est compact cette fonction atteind ses bornes donc il existe $a_0 \in A$ tel que

$$d(x, a_0) = \inf_{a\in A} \{d(x,a)\}.$$

* On a $\forall a, b, x \in E, |d(x,a) - d(x,b)| \leq d(a,b)$ donc $a \rightarrow d(x,a)$ est lipschtzienne donc continue.

et l'inégalité provient de l'inégalité triangulaire car $\forall a, b, x \in E, d(x,a) \leq d(x,b) + d(a,b)$ et $d(x,b) \leq d(x,a) + d(a,b)$.

7. Soit $b \in A$ et soit $r = d(m,b)$ On pose $K = B_f(m,r) \cap A$.

K est non vide car $b \in K$. K est fermé car intersection de deux fermés.

De plus K est borné par définition donc K est un compact de E car E est de dimension finie.

$\forall c \in K, \forall d \notin A \backslash K$ on a $d(m,c) \leq r < d(m,d)$ donc $\inf_{a\in A} d(m,a) = \inf_{a\in K} d(m,a)$

D'après la question précédente il existe $a_0 \in A, d(m, a_0) = \inf_{a\in K} d(m,a) = d_A(m)$.

8.

(a) Si $x \in \bar{A}$ alors $d_A(x) = 0$. Donc notre hypothèse donne un $a \in A$ tel que $|x - a| = 0$ donc $x = a$ donc $x \in A$. On vient de montrer que $\bar{A} \subset A$ donc A est fermé.

(b) Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi $\forall x, y \in X, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in X$.
Si A est un singleton alors c'est un intervalle, sinon soient $a < b \in A$. Alors soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq x \leq b$.
On pose a' le point de A tel que $d\left(x, A \cap \left]-\infty, x\right]\right) = d\left(x, a'\right)$ (il existe d'après la question **8.a.**) et b' tel que $d\left(x, A \cap \left[x, +\infty\right[\right) = d\left(x, b'\right)$.
On a $a' \leq x$ et si y vérifie $a' < y < x$ alors $d(x, y) < d(x, a')$ donc $y \notin A \cap \left]-\infty, x\right]$. Donc $A \cap \left]-\infty, x\right] = A \cap \left]-\infty, a'\right]$ de même $A \cap \left[x, +\infty\right[= A \cap \left[b', +\infty\right[$. Donc $A \cap \left]a', b'\right[= \emptyset$.
On pose $m = \frac{a'+b'}{2}$ on a $d(m, A) = d(m, a') = d(m, b') = \frac{b'-a'}{2}$ ce qui contredit l'uncité de l'hypothèse.
Donc $x = a' = b' \in A$ et A est un intervalle.

9. Soit $h = (h_1, ..., h_n)$ le projeté orthogonal de x sur H alors $d(x, H) = \|x - h\|$
On a $a_1 h_1 + ... + a_n h_n + b = 0$ donc $b = -a_1 h_1 - ... - a_n h_n$
Donc $|a_1 x_1 + ... + a_n x_n + b| = |a_1 (x_1 - h_1) + ... + a_n (x_n - h_n)|$
Si on appelle $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ alors $|a_1 x_1 + ... + a_n x_n + b| = |\langle \vec{a}, x - h \rangle|$
Soit $M = (m_1, ...m_n)$ et $P = (p_1, ..., p_n)$ deux points de H.
Alors $\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{MP} \right\rangle = 0$ en effet $b = -a_1 m_1 - ... - a_n m_n = -a_1 p_1 - ... - a_n p_n$
Donc $a_1 (p_1 - m_1) + ... + a_n (p_n - m_n) = 0$. Donc $\vec{a}$ est orthogonal à H donc $\vec{a}$ et $x - h$ sont colinéaires (car orthogonaux à H) et finalement
$$|\langle \vec{a}, x - h \rangle| = \|\vec{a}\| \|x - h\|$$
Donc
$$d(x, H) = \frac{|\langle \vec{a}, x - h \rangle|}{\|\vec{a}\|} = \frac{|a_1 x_1 + ... + a_n x_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}}$$

I- B : Quelques exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rappels sur les matrices orthogonales, bases orthonormées, tout ça tout ça...

Soit E un espace euclidien, i.e. $\mathbb{R}$ ev de dimension finie et muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Une base $(e_1, ..., e_n)$ de E est dite orthonormée ssi
$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Une application linéaire u de E dans E est dite orthogonale ssi on a une des propriétés suivantes :

- u est une isométrie ($\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$)
- u conserve le produit scalaire ($\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$) car $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
- L'image d'une b.o.n. de E est une b.o.n. de E $\left(\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \Rightarrow \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \delta_{i,j}\right)$
- Soit A la matrice de u dans une b.o.n. alors les vecteurs colonnes de A forment une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$.
- Soit A la matrice de u dans une b.o.n. alors $A^{-1} = A^T$ $(A \in O_n(\mathbb{R}))$
  Astuce : pour calculer un produit de matrice AB le coefficient en i,j du résultat est le produit scalaire de la ligne i de A avec la colonne J de B.
  En particulier les coefficients de $A^T \times A$ sont les produits scalaires des colonnes de A donc si les colonnes de A forment une famille orthonormée on a $A^T \times A = I_n$.
  Si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ avec $(e_1, ...e_n)$ orthonormée alors
$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_i, e_j \rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_i, e_j \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle e_i, e_i \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \end{aligned}$$
  Et $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(e_i)$ donc si $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est un b.o.n. alors $\|u(x)\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \|x\|$.

Fin du rappel

10.

(a) **Rappel : théorème spectral :** Si A est une matrice réelle symétrique alors elle est diagonalisable dans une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ autrement dit il existe une matrice P telle que $P^{-1}AP = D$ avec $P^{-1} = P^T$. Donc $\|P\| = 1$ car P est la matrice d'une isométrie.
$\|D\| = \left\|P^{-1}AP\right\| \leq \left\|P^{-1}\right\| \|A\| \|P\| = \|A\|$
et $\|A\| = \left\|PDP^{-1}\right\| \leq \|P\| \|D\| \left\|P^{-1}\right\| = \|D\|$
Donc $\|A\| = \|D\|$.

(b) Soit A la matrice de u dans la base canonique et soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ où $d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}^+$ une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$. On a $\|u\| = \|A\| = \|D\|$.
Soit $x = (x_1, ..., x_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ on a

$$\|D\| = \sup \frac{\|Dx\|}{\|x\|} = \sup \frac{\sqrt{d_1^2 x_1^2 + ... + d_n^2 x_1^2}}{\|x\|} \leq \max_{1\leq i\leq n}(d_i) \frac{\sqrt{x_1^2 + ... + x_1^2}}{\|x\|} = \max_{1\leq i\leq n}(d_i)$$

Notons k un indice tel que $d_k = \max_{1\leq i\leq n}(d_i)$ alors si $x_0 = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ avec le 1 en k^e position alors $\|Dx_0\| = \sqrt{d_k^2} = d_k$ et $\|x_0\| = 1$ donc $\|D\| = \sup \frac{\|Dx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Dx_0\|}{\|x_0\|} = d_k = \max_{1\leq i\leq n}(d_i)$
Finalement,

$$\|D\| = \max_{1\leq i\leq n}(d_i).$$

Remarque : $\sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \left\|\frac{u(x)}{\|x\|}\right\| = \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\|y\|=1} \|u(y)\|$

(c) de qui se moque-t-on ?

11.

(a) $\forall M \in Gl_n(\mathbb{R})$ on a $M^T M$ est symétrique car $\left(M^T M\right)^T = M^T \left(M^T\right)^T = M^T M$.
0 est valeur propre de A ssi il existe $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}, Ax = 0_{\mathbb{R}^n}$ ssi $\ker A \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ ssi A n'est pas inversible.
Donc 0 n'est pas valeur propre de $M^T M$.
Soit α une valeur propre de $M^T M$ (alors α est réelle d'après le théorème spectral) et il existe un vecteur X non nul tel que $M^T M X = \alpha X$. Mais alors $X^T M^T M X = \alpha X^T X$.
Mais $X^T X = \|X\|^2 > 0$ et $X^T M^T M X = (MX)^T MX = \|MX\|^2 > 0$ donc $\alpha = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} > 0$.

Soit P la matrice orthogonale telle que $P^{-1} M^T M P = \Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} C^2 &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^{-1} \times P \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \Delta P^{-1} = M^T M. \end{aligned}$$

De plus $C^T = \left(P^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}^T P^T = P \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^{-1} = C.$

Donc on a bien construit une matrice C symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $C^2 = M^T M$.

(b) On pose $U = MC^{-1}$ donc $UC = M$. Et

$$\begin{aligned} U^T &= \left(MC^{-1}\right)^T = \left(C^{-1}\right)^T M^T = C^{-1}M^T \\ &= C^{-1}M^T M M^{-1} = C^{-1}C^2 M^{-1} = CM^{-1} = U^{-1} \end{aligned}$$

($AB = I_n$ alors $B^T A^T = I_n$ autrement dit $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$)
Donc $U \in O_n(\mathbb{R})$ et la vie est belle !

12.

(a) L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (polynomiale)
$\mathcal{F} = \det^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Posons $\forall x \in \left]1, +\infty\right[, M_x = \begin{pmatrix} x & 0 & & & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}$ et est symétrique et la plus grande de ses valeurs propres est x alors $\|M_x\| = x$ donc $\mathcal{F}$ n'est pas bornée donc pas compacte !
Rappel : $A \subset E$ est borné ssi il existe $r > 0, \forall a \in A, \|a\| < r$.

13. $d(0_n, \mathcal{F}) = \inf\{\|M\|, M \in \mathcal{F}\}$.

Si $M \in \mathcal{F}$ alors $M \in GL_n(\mathbb{R})$ donc on peut écrire $M = UC$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et C symétriques à valeurs propres strictement positives.

Donc $\det M = \det U \det C = \det C$ car $\det U \in \{-1, +1\}$ et $\det M = 1$ et $\det C > 0$.

$\|M\| \leq \|U\| \|C\| = \|C\|$ car U est la matrice d'une isométrie.

Astuce $C = U^{-1}M$ donc $\|C\| \leq \left\|U^{-1}\right\| \|M\| = \|M\|$ et donc $\|M\| = \|C\|$ est le maximum des valeurs propres de C. Or le produit des valeurs propres de C est égal à son déterminant qui est égal à 1 donc le maximum des valeurs propres de C est supérieur ou égal à 1 donc $\|M\| \geq 1$

Or si $M = I_n$ alors $\|M\| = 1$ donc $\inf\{\|M\|, M \in \mathcal{F}\} = 1 = d(0_n, \mathcal{F})$.

14. On cherche les matrices M telles que $\det M = 1$ et $\|M\| = 1$.

Si on écrit $M = UC$ la décomposition polaire de M alors $\det C = 1$ et le max des valeurs propres de C est égal à 1. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres (positives) de C. $\forall i, \lambda_i \leq 1$ et $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Supposons qu'il existe j tel que $\lambda_j < 1$ alors comme $\prod_{i \neq j} \lambda_i \leq 1$ on a $\prod_{i=1}^n \lambda_i < 1$: contradiction.

Donc toutes les valeurs propres de C sont égales à 1. Or, C est diagonalisable car symétrique donc C est semblable à I_n donc $C = I_n$ et donc $M = U \in O_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement si $M \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $\det M = 1$ et $\|M\| = 1$.

Donc $d(0_n, \mathcal{F})$ est atteinte en M ssi $M \in SO_n(\mathbb{R})$.

15.

(a) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \|A^p\| \leq \|A\|^p$ et $\sum_{p \in \mathbb{N}} \|A\|^p$ converge car $\|A\| < 1$ donc $\sum_{p \in \mathbb{N}} \|A^p\|$ converge ce qui signifie que $\sum_{p \in \mathbb{N}} A^p$ converge absolument.
$(I_n - A) \sum_{p \in \mathbb{N}} A^p = \sum_{p \in \mathbb{N}} A^p - \sum_{p \in \mathbb{N}} A^{p+1} = A^0 = I_n$.

(b) Premier cas si $T = I_d$ alors si $\|I_n - M\| < 1$ on pose $A = I_n - M$ de d'après la question précédente $I_n - A$ est inversible et $I_n - A = M$.
Cas général : si $\|T - M\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$
Alors $\left\|I_n - T^{-1}M\right\| = \left\|T^{-1}(T - M)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|T - M\| < 1$
Donc d'après le premier cas $T^{-1}M$ est inversible et par suite $M = T\left(T^{-1}M\right)$ est inversible.

16. $d(T, \mathcal{S}) = \inf\{\|T - M\|, M \in \mathcal{S}\}$

D'après la question précédente par contraposition si $M \in \mathcal{S}$ alors $\|T - M\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ donc $d(T, \mathcal{S}) \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

$TT^{-1} = I_n$ donc $\left\|TT^{-1}\right\| = 1 \leq \|T\| \left\|T^{-1}\right\|$ donc $\|T\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ et ça aide pas trop.

On note $T = UC$ sa décomposition polaire donc $\left\|T^{-1}\right\| = \left\|C^{-1}\right\|$

$$\begin{aligned} d(T,\mathcal{S}) &= \inf\left\{\|UC - M\|, M \in \mathcal{S}\right\} \\ &= \inf\left\{\left\|C - U^{-1}M\right\|, M \in \mathcal{S}\right\} \\ &= \inf\left\{\|C - M\|, M \in \mathcal{S}\right\} = d(C,\mathcal{S}) \end{aligned}$$

C est diagonalisable donc il existe une matrice P orthogonale telle que $PCP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$ avec $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 ... \leq \lambda_n$.

(a) donc

$$\begin{aligned} d(T,\mathcal{S}) &= \inf\left\{\|C - M\|, M \in \mathcal{S}\right\} = \inf\left\{\left\|PCP^{-1} - PMP^{-1}\right\|, M \in \mathcal{S}\right\} \\ &= \inf\left\{\|D - M\|, M \in \mathcal{S}\right\} \end{aligned}$$

On choisit alors $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$

On a $D - M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\|D - M\| = \lambda_1$ qui est la valeur propre minimale de D.

Or $\left\|C^{-1}\right\|$ est la plus grande valeur propre de C^{-1} donc c'est $\max\left\{\frac{1}{\lambda_i}, \lambda_i : \text{valeur propre de } C\right\} = \frac{1}{\min \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_1}$ donc $\|D - M\| = \frac{1}{\|C^{-1}\|}$

Finalement, $d(T,\mathcal{S}) \leq \frac{1}{\|C^{-1}\|} = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Donc on peut conclure

$$d(T,\mathcal{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

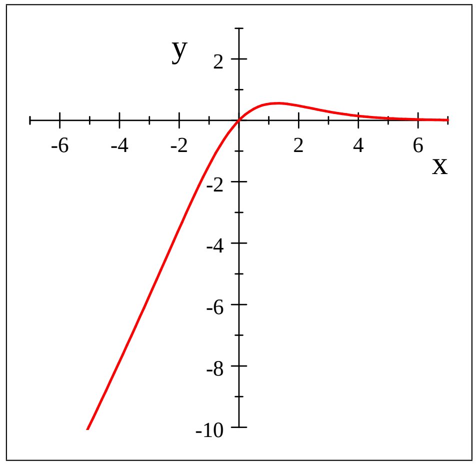
Partie II : Points d'une courbe à égale distance d'une droite.

17. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{e^x + 1}$

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(e^x+1) - 2xe^x}{(e^x+1)^2} = 2\frac{-xe^x + e^x + 1}{(e^x+1)^2}$
Soit g définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -xe^x + e^x + 1$ donc g est du signe de f'.
Alors $g'(x) = -xe^x - e^x + e^x = -xe^x$ du signe de $-x$.
Donc g est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ donc g s'annule une fois sur $\mathbb{R}^+$.
De plus $g(1) = 1$ et $g(2) = -e^2 + 1 < 0$ donc g s'annule entre 1 et 2.

Notons α la racine de g. On a

x		α	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

(b) 

18. def alpha(epsilon) :
    $e = 1$
    $x = 1$
    $y = 2$
    while $e \geq epsilon$:
    $z = \frac{x+y}{2}$
    $t = -z * \exp o(z) + \exp o(z) + 1$
    if $t > 0$:
    $x = z$
    else :
    $y = z$
    $e = y - x$
    Return x

19. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{e^x+1} = 0$ donc d'après le critère de Riemann $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et comme f est positive sur $\mathbb{R}^+$, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. (attention f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ssi $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge).

20. $f_n(x) = (-1)^n 2xe^{-(n+1)x}$

    $\sum_{n=0}^{N} f_n(x) = 2xe^{-x} \sum_{n=0}^{N} (-e^{-x})^n$

    Pour $x > 0, |-e^{-x}| < 1$ et donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-e^{-x})^n = \frac{1}{1+e^{-x}}$

    Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{2xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2x}{e^x+1} = f(x)$.

    Et pour $x = 0, f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0 = f(0)$.

21. $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$

    On peut utiliser le critère de convergence des séries alternées de fonctions car $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x)$ est positif si n est pair et négatif sinon.

    De plus $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f_{n+1}(x)| = 2xe^{-(n+2)x} = \left(2xe^{-(n+1)x}\right)e^{-x} \leq 2xe^{-(n+1)x} = |f_n(x)|$

    Et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1}{n+1}e^{-1} = 0$

    Donc, on a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de la série $\sum f_n$

    Donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n 2xe^{-(n+1)x} dx$$

    Et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (-1)^n 2xe^{-(n+1)x} dx &= (-1)^n 2\left(\left[x\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} dx\right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{n+1}\left[\frac{e^{-(n+1)x}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{2(-1)^n}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n}}{\left(n+1\right)^{2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n^{2}} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^{2}} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n\right)^{2}}$$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\left(-1\right)^{n}}{\left(n+1\right)^{2}} = \frac{2\pi^2}{8} - \frac{2\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$$