4.2.2 Corrigé de la deuxième épreuve écrite

CORRIGE

Partie I.A

1. On a $f_n(0) = a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Donc, par différence, $b_n \, sin(nx) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2a. (i) Si la suite $(b_n)_n$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(b_{\varphi(n)})$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon$.
Comme $\varphi(n) \to +\infty$ avec n, on peut en extraire une sous-suite, notée $(n_k)_k$ telle que :
$\forall k \geq 1$, $n_{k+1} \geq 3n_k$.

(ii) On recherche des intervalles $[a'_k \, , b'_k]$ de la forme : $a'_k = \dfrac{\pi}{6} + p_k \, \pi$, $b'_k = \dfrac{5\pi}{6} + p_k \, \pi$, avec $p_k \in \mathbb{Z}$ et, si $J_k = \dfrac{1}{n_k} \, [a'_k \, , b'_k] = [a_k \, , b_k]$. On a bien $b_k - a_k = \dfrac{2\pi}{3n_k}$.

Il est clair que si l'on trouve de tels entiers $p_k \in \mathbb{Z}$, on aura : $\forall x \in J_k$, $|sin(n_k \, x)| \geq \dfrac{1}{2}$.

Choisissons $p_1 = 0$ et supposons alors construits $J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_k$. Construisons J_{k+1}. La longueur de l'intervalle $n_{k+1} J_k$ est égale à $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} \dfrac{2\pi}{3} \geq 2\pi$, donc il existe $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ tel que :

$[\alpha_{k+1} \; , \; \alpha_{k+1} + 2\pi] \subset n_{k+1} \, . \, J_k$

Soit $p'_{k+1} \in \mathbb{Z}$ l'entier tel que $p'_{k+1} \, \pi \leq \alpha_{k+1} < (p'_{k+1} + 1)\pi$.

Alors, si $p_{k+1} = p'_{k+1} + 1$, on a : $[p_{k+1} \, \pi \, , (p_{k+1} + 1)\pi] \subset [\alpha_{k+1} \, , \alpha_{k+1} + 2\pi]$.

Posons $a'_{k+1} = \dfrac{\pi}{6} + p_{k+1} \, \pi$, $b'_{k+1} = \dfrac{5\pi}{6} + p_{k+1} \, \pi$.

On a : $[a'_{k+1} \, , b'_{k+1}] \subset n_{k+1} \, . \, J_k$, et donc : $J_{k+1} = \dfrac{1}{n_{k+1}} \, [a'_{k+1} \, , b'_{k+1}] \subset J_k$.

Remarque : Pour la construction d'une suite d'entiers $(p_k)_k$, on peut aussi procéder de la façon suivante. Supposons construits $p_1 , \ldots , p_k$ dans Z avec $p_1 = 0$ satisfaisant les conditions demandées ; on doit chercher $p_{k+1} \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{1}{n_k} \left[\frac{\pi}{6} + p_k \, . \, \pi \right] \leq \frac{1}{n_{k+1}} \left[\frac{\pi}{6} + p_{k+1} \, . \, \pi \right] \leq \frac{1}{n_{k+1}} \left[\frac{5\pi}{6} + p_{k+1} \, . \, \pi \right] \leq \frac{1}{n_k} \left[\frac{5\pi}{6} + p_k \, . \, \pi \right] ,$$

ce qui équivaut à :

$$\alpha_k = p_k + \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1 \right) \left(p_k + \frac{1}{6} \right) \leq p_{k+1} \leq p_k + \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1 \right) \left(p_k + \frac{5}{6} \right) = \beta_k .$$

Comme $\beta_k - \alpha_k = \left(\dfrac{n_{k+1}}{n_k} - 1 \right) \dfrac{4}{6} \geq \dfrac{4}{3} > 1$, un tel entier $p_{k+1} \in$ Z existe.

(iii) La suite $(J_k)_k$ est une suite d'intervalles non vides fermés emboîtés de longueur $\leq \dfrac{2\pi}{3n_k}$, donc tendant vers 0 : il en résulte que $\bigcap_{k \geq 1} J_k = \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Comme , $\forall k$, $|sin(n_k \, x_0)| \geq \dfrac{1}{2}$, il en résulte que $(b_{n_k} \, sin(n_k \, x_0))_k$ ne peut tendre vers 0 puisque

$|b_{n_k} sin(n_k \, x_0)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

2b. (i) On a $\int_0^{2\pi} [b_n \, sin(nx)]^2 \, dx = b_n^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{cos(2nx)}{2}\right] dx = \pi \, b_n^2$.

(ii) Si la suite (b_n) est bornée, d'après le théorème de convergence dominée, on déduit que $\int_0^{2\pi} [b_n sin(nx)]^2 \, dx \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc, d'après (i), $(b_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(iii) Si $b'_n = Inf(1 \, , \, |b_n|)$, on a : $|b'_n \, sin(nx)| \leq |b_n \, sin \, nx|$ et donc $(b'_n \, sin(nx))$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le raisonnement de (ii) implique que (b'_n) tend vers 0 et donc, pour $n \geq N$, $b'_n = b_n$, *i.e.* (b_n) tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Partie I.B

1a. Comme $\left|\frac{\alpha_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$, on a aussi $\left|\frac{\alpha_n}{n} \; e_n(x)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) = v_n$, terme général d'une série numérique convergente : la série $\left[\frac{\alpha_n}{n} \; e_n(x)\right]_{n\geq 1}$ converge absolument.

1b. D'après (1a), la série $\left[\frac{\alpha_n}{n} \; e_n(x)\right]_{n\geq 1}$ converge normalement sur $[0 \, , \, \pi]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto e_n(x) = sin \; nx : [0 \, , \, \pi] \to \mathbb{R}$ est continue. Donc, sa somme $\theta(\alpha)$ est continue sur $[0 \, , \, \pi]$.

1c. θ est évidemment linéaire.

θ est injective : puisque la série converge normalement sur $[0 \, , \, \pi]$, elle converge uniformément sur $[0 \, , \, \pi]$, on a donc :

$$\forall k \geq 1 \; , \; \int_0^{\pi} sin \; kx \, . \, \theta(\alpha)(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n} \int_0^{\pi} sin \; kx \, . \, sin \; nx \, dx = \frac{\alpha_k}{k} \int_0^{\pi} (sin \; kx)^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \, \frac{\alpha_k}{k}$$

d'où l'injectivité.

Par ailleurs, H est complet pour cette norme car ℓ^2 est complet et θ est injective et linéaire.

2. Soit $f \in E$.

Posons $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \, , \, x \in [0 \, , \pi] \\ -f(-x) \, , \, x \in [-\pi \, , 0] \end{cases}$ et $\tilde{f}$ prolongée à $\mathbb{R}$ tout entier par 2π périodicité, ce qui est possible car $\tilde{f}(-\pi) = -f(\pi) = 0 = f(\pi) = \tilde{f}(\pi)$.

$\tilde{f}$ est continue, C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π–périodique. Elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier (théorème de Dirichlet) en chaque point $x \in \mathbb{R}$, *i.e.* :

$$\tilde{f}(x) = \sum_0^{\infty} a_n \, cos \; nx + \sum_1^{\infty} b_n \, sin \; nx \, .$$

Mais $\tilde{f}$ étant impaire :

$$a_n = a_n(\tilde{f}) = 0 \;\; \text{et} \;\; b_n = b_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \; sin \; nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, sin \; nx \, dx \, .$$

D'autre part, $\tilde{f}$ étant C^1 par morceaux, par intégration par parties, on obtient :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \; sin \; nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\tilde{f}(x) \; \frac{cos \, nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}\,'(x) \; \frac{cos \, nx}{n} \; dx$$

$$\textit{i.e.} \qquad b_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\tilde{f}}\,'(x) \, cos \; nx \, dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} f\,'(x) \, cos \; nx \, dx = \frac{\alpha_n}{n} \quad , \quad n \geq 1$$

où $\tilde{\tilde{f}}\,'(x) = \begin{cases} f\,'(x) \quad , \, x \in [0 \, , \pi] \\ f\,'(-x) \, , \, x \in [-\pi \, , 0] \end{cases}$

et comme $\tilde{\tilde{f}}\,'\ (=\tilde{f}\,')$ est continue par morceaux sur $[-\pi , \pi]$, la suite de ses coefficients de Fourier est dans ℓ^2 et donc $(\alpha_n) \in \ell^2$ (inégalité de Parseval). D'où $E \subset H$.

3. Soit $(f , g) \longmapsto \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f'\, g'\, dt : E \times E \to \mathbb{R}$: cette application est bilinéaire, symétrique et définie positive puisque, si $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} |f'|^2\, dt = 0$, cela implique, f' étant continue par morceaux sur $[0 , \pi]$, que $f'(t) = 0$ sauf, peut-être, en un nombre fini de points de $[0 , \pi]$ et donc, f étant continue sur $[0 , \pi]$ est constante, et $f(0) = 0$ donc $f = 0$ sur $[0 , \pi]$.

De plus, en reprenant les calculs précédents, d'après l'égalité de Parseval appliquée à la fonction paire $\tilde{\tilde{f}}\,'$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\tilde{f}}\,'|^2\, dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(\tilde{\tilde{f}}\,')|^2$$

car $a_0(\tilde{\tilde{f}}\,') = 0$ puisque $a_0(\tilde{\tilde{f}}\,') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\tilde{f}}\,'\, dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}\,'\, dx = \dfrac{1}{2\pi}\,[\tilde{f}(\pi) - \tilde{f}(-\pi)] = 0$

et $b_n(\tilde{\tilde{f}}\,') = 0$ puisque $\tilde{\tilde{f}}\,'$ est paire.

Or $a_n(\tilde{\tilde{f}}\,') = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\tilde{f}}\,' \cos nx\, dx = \alpha_n$, d'où $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\tilde{f}}\,'|^2\, dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} |f'|^2\, dx = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$

i.e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} |f'|^2\, dx = \|f\|_H^2$.

Il en résulte immédiatement que E est dense dans H en prenant $f_N = \displaystyle\sum_1^N \dfrac{\alpha_n}{n}\, e_n \to f$ dans H, et en remarquant que f_N appartient à E, pour tout entier N.

4a. Pour tout $x \in [0 , \pi]$:

$$|f(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\alpha_n}{n}\ |\sin nx| \right| \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_1^{\infty} \alpha_n^2\right)^{1/2} \Rightarrow \|f\|_\infty \le k\|f\|_H \text{ avec } k = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}.$$

Remarque : On peut aussi établir l'inégalité (*) en se limitant aux fonctions $f \in E$ qui, d'après la question précédente, est dense dans H.

Et si $f \in E$, on a : $\forall x \in [0 , \pi]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\, dt$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in [0 , \pi] \ ,\ |f(x)| \le \left(\int_0^x |f'(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2\, dt\right)^{1/2}.$$

D'où $\|f\|_\infty \le \sqrt{\pi}\ \|f\|_H$.

4b. On a $h_a \in E$, et pour tout $f \in E$: $|(f|h_a)| \le \|f\|_H\, \|h_a\|_H$ (d'après 3.).

Or $(f|h_a) = \dfrac{2}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^a \frac{f'}{a}\, dx - \int_a^{\pi} \frac{f'}{\pi - a}\, dx\right\} = \dfrac{2}{\pi}\, f(a)\left[\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\pi - a}\right] = \dfrac{2}{a(\pi - a)}\, f(a)$

et $\|h_a\|_H^2 = \dfrac{2}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^a \frac{1}{a^2}\, dx + \int_a^{\pi} \frac{1}{(\pi - a)^2}\, dx\right\} = \dfrac{2}{\pi}\left\{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\pi - a}\right\} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{a(\pi - a)} = \dfrac{2}{a(\pi - a)}$.

D'où, pour tout $f \in E$ et pour tout $a \in\,]0 , \pi[$: $|f(a)| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a(\pi - a)}\ \ \|f\|_H \le \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\ \|f\|_H$ puisque

$\sqrt{a(\pi-a)} \leq \frac{\pi}{2}$.

Par suite, $(*)\ \|f\|_\infty \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ \|f\|_H$ pour tout $f \in E$, et donc aussi pour tout $f \in H$ puisque E est dense dans H .

En particulier, si $f = h_{\pi/2}$ dans $(*)$, on obtient $\|f\|_\infty = 1$ et $\|h_{\pi/2}\|_H = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, d'où l'égalité dans $(*)$.

Ainsi, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ réalise la meilleure constante pour $(*)$ de 4a. .

5. Il est immédiat de vérifier $(F(0) = 0)$ que, puisque $f_n \in E$, $F \circ f_n = g_n \in E$ et que, sauf pour un nombre fini de points au plus, on a : $g'_n(x) = F'(f_n(x))\ .\ f'_n(x)$.

(a) Puisque (f_n) converge vers f dans H et que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ \|f_n\|_H$, on obtient que $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée puisque $(\|f_n\|_H)$ est bornée. Soit $\|f_n\|_\infty \leq A$.

(b) Ensuite, en écrivant que, compte-tenu de 3., $(\|f\|_H = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \|f'\|_{L^2(0\ ,\ \pi)}$ pour $f \in E)$:

$$\|g_p - g_q\|_H = \|F\circ f_p - F\circ f_q\|_H = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \|(F\circ f_p)' - (F\circ f_q)'\|_{L^2[0\ ,\ \pi]} .$$

Or

$$\begin{aligned}\|(F\circ f_p)' - (F\circ f_q)'\|_{L^2} &= \|(F'\circ f_p)\ .\ f'_p - (F'\circ f_q)\ .\ f'_q\|_{L^2}\\ &\leq \|\ [(F'\circ f_p) - F'\circ f_q]\ .\ f'_p\|_{L^2} + \|(F'\circ f_q)\ .\ [f'_p - f'_q]\|_{L^2}\\ &\leq \|F'\circ f_p - F'\circ f_q\|_\infty\ \|f'_p\|_{L^2} + M_1\|f'_p - f'_q\|_{L^2}\\ &\leq M_2\ \|f_p - f_q\|_\infty\ \|f'_p\|_{L^2} + M_1\|f'_p - f'_q\|_{L^2}\end{aligned}$$

(en utilisant la formule des accroissements finis)

d'où :
$$\|g_p - g_q\|_H \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ M_2\ \|f_p - f_q\|_H\ \|f_p\|_H + M_1\|f_p - f_q\|_H .$$

(c)
$$\|g_p - g_q\|_H \leq \left(M_2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ \|f_p\|_H + M_1\right) \|f_p - f_q\|_H \leq \text{cte}\ \|f_p - f_q\|_H$$

puisque $(\|f_p\|_H)$ est bornée. Et donc la suite $(g_p)_p$ est de Cauchy dans l'espace complet H donc converge dans H vers g. Et d'après l'inégalité $(*)$ (g_p) converge aussi vers g dans $L^\infty([0\ ,\ \pi])$. Or $g_p = F\circ f_p$ et (f_p) de Cauchy dans H est aussi de Cauchy dans $L^\infty[0\ ,\ \pi]$ par $(*)$, donc converge vers f dans $L^\infty([0, \pi])$ (et en fait $f \in H$ car $(f_p)_p$ converge vers f dans H). Par suite, $g_p \to F\circ f$ dans L^∞ . Il en résulte que $g = F\circ f \in H$.

(d) Si $f\ , g \in H$, alors $f + g$ et $f - g \in H$ et donc, avec $F(x) := x^2$, $(f+g)^2$ et $(f-g)^2 \in H$ d'où $f\ .\ g = \frac{1}{4}\ [(f+g)^2 - (f-g)^2] \in H$ et H est une algèbre.

Partie II

1. En appliquant la formule de Taylor en x_0, on obtient :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + h^2 \varepsilon(x_0, h)$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + h^2 \varepsilon(x_0, -h)$$
avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(x_0, h) = 0$.

Il en résulte que :

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + [\varepsilon(x_0, h) + \varepsilon_0(x_0, -h)] \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f''(x_0).$$

2a. f étant continue, φ est aussi continue et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
Par ailleurs, la dérivée au sens de Schwarz étant linéaire, $\varphi^{('')}$ existe et est égale à :
$$\varphi^{('')}(x) = f^{('')}(x) + 2\varepsilon = 2\varepsilon > 0.$$
Si φ admet un extremum positif strictement sur $[a, b]$, il est atteint par un point $x_0 \in]a, b[$ puisque φ est continue sur $[a, b]$. Par ailleurs, pour $h > 0$ assez petit, on aurait :
$$\varphi(x_0 + h) \leq \varphi(x_0) \quad , \quad \varphi(x_0 - h) \leq \varphi(x_0)$$
et donc, pour $h > 0$ assez petit :
$$\frac{\varphi(x_0+h) + \varphi(x_0-h) - 2\varphi(x_0)}{h^2} \leq 0$$
et donc aussi $\varphi^{('')}(x_0) \leq 0$, ce qui est absurde.

2b. Il résulte de 2a. que, pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq 0$, *i.e.* :
$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon(x-a)(b-x) \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$
i.e. $f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leq 0 \quad , \quad \forall x \in [a, b]$ (faire tendre ε vers 0).

De même, en considérant la fonction $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(b-x)$ sur $[a, b]$, on a : $\psi^{('')}(x) = -2\varepsilon < 0$ et ne peut admettre de minimum strictement négatif sur $[a, b]$ et donc,
$\forall x \in [a, b]$, $\psi(x) \geq 0$, *i.e.* :
$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq \varepsilon(a-x)(b-x) \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$
i.e. $f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in [a, b]$.

Finalement, on a : $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ et f est affine.

3a. Puisque la série $[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, il résulte du I1. que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0 et donc sont bornées par $M \geq 0$.
Par suite, la série $\left[\dfrac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]_{n\geq 1}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \Big| \leq \frac{2M}{n^2}.$$
Chaque fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la somme
$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3b. Notons $S_0(x) = 0$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. On a :

$$\Delta(x\,,h) = \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2 h^2}\ [a_n \cos(nx+nh) + b_n \sin(nx+nh) + a_n \cos(nx-nh) + b_n \sin(nx-nh)$$

$$-2a_n \cos nx - 2b_n \sin nx]$$

i.e.

$$\Delta(x\,,h) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 h^2}\ [2a_n \cos nx\,(\cos nh - 1) + 2b_n \sin nx\,.\,(\cos nh - 1)]$$

$$\Delta(x\,,h) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ .\ 2(\cos nh - 1)\ \frac{1}{n^2 h^2}$$

et $\quad \dfrac{2}{n^2 h^2}\ (\cos nh - 1) = -4\ \sin^2\left(\dfrac{nh}{2}\right) \dfrac{1}{n^2 h^2} = u(nh).$

2c. On peut écrire (transformation d'Abel) :

$$\Delta(x\,,h) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ u(nh) = \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n(x) - S_{n-1}(x))\ u(nh)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(x)\ u(nh) - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)\ u((n+1)h) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x)\ [u(nh) - u((n+1)h)]$$

chacune des séries $[S_n(x)\ u(nh)]$ et $[S_n(x)\ u((n+1)h)]$ étant convergente (en $1/n^2$).
Par ailleurs, la série $[u(nh) - u(n+1)h)]$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [u(nh) - u((n+1)h)] = u(0) = 1 \qquad (u(nh) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty)$$

et donc $\Delta(x\,,h) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [S_n(x) - f(x)]\ [u(nh) - u((n+1)h)]$.

2d. (i) Par hypothèse, on sait que $S_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
Par suite, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N = N(\varepsilon\,,x) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |S_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
Par ailleurs, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ fixé, $[u(nh) - u((n+1)h)]$ tend vers $u(0) - u(0) = 0$ quand h tend vers 0 puisque u est continue en 0 ($u(0) = 1$).
Et, d'autre part, en écrivant que $u(nh) - u((n+1)h) = \int_{nh}^{(n+1)h} u'(t)\,dt$ et en remarquant que

$$u'(t) = \frac{8}{t^2}\left[-\frac{1}{t}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,.\,\cos\frac{t}{2}\right]$$

et donc, pour $t \geq 1$, $|u'(t)| \leq \dfrac{16}{t^2}$, on obtient que :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u(nh) - u((n+1)h)| \leq \int_{Nh}^{+\infty} |u'(t)|\,dt \leq M = \int_{0}^{+\infty} |u'(t)|\,dt < +\infty$$

car u est C^1 au voisinage de 0 (même analytique).
Finalement, on a :

$$|\Delta(x\,,h) - f(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |S_n(x)[u(nh) - u((n+1)h)]| + M\varepsilon$$

et si h tend vers 0, la somme \i\su($n = 0$,N,) tend aussi vers 0 et donc pour $|h| \leq h_0(\varepsilon)$, on a :

$$|\Delta(x\,,h) - f(x)| \leq \varepsilon(M+1)$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{h\to 0,h\neq 0}\Delta(x,h)$ existe et vaut $f(x)$.

Remarque : En fait, la preuve précédente est une variante du théorème d'Abel classique, dont voici une variante de la preuve à l'aide du théorème de convergence dominée.

Pour $(h\,,t) \in \mathbb{R}_+^2$, posons :

$$g(h\,,t) = \begin{cases} 0 & si\ h=0 \\ S_n(x)-f(x) & \text{avec } n=E(t/h) \text{ pour } h\neq 0 \end{cases}$$

où $E(y)$ désigne la partie entière de y .

On a alors :

$$S_n(x) - f(x)[u(nh) - u((n+1)h)] = \int_{nh}^{(n+1)h} g(h\,,t)\,u'(t)\,dt\,.$$

Comme la suite $(S_n(x) - f(x))_n$ converge vers 0, elle est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (h\,,t) \in \mathbb{R}_+^2 \quad , \quad |g(h\,,t)| \leq M\,.$$

De plus, compte-tenu de l'expression de $u'(t)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |u'(t)|\,dt$ est convergente.

Enfin, l'application $h \longmapsto g(h\,,t)$ est continue en 0, puisque la suite $(S_n(x) - f(x))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi, on déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$h \longmapsto \int_0^{+\infty} g(h\,,t)\,u'(t)\,dt = \Delta(x\,,h) - f(x) \text{ est continue en 0,}$$

i.e. : $\quad \lim\limits_{h\to 0}\ [\Delta(x\,,h) - f(x)] = 0$.

(ii) Considérons maintenant $G(x) := \int_0^x (x-t)\ f(t)\,dt$, pour $x \in \mathbb{R}$.

G a un sens car f est, par hypothèse, continue sur $\mathbb{R}$. De plus, G est dérivable et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad G'(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

G' est donc C^1 et $G''(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Ainsi, la fonction $x \longmapsto (F - G)(x)$ est continue et admet une dérivée au sens de Schwarz nulle et, de II.2.b , est une fonction affine sur $\mathbb{R}$: il existe $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \;,\; F(x) = \alpha x + \beta + \int_0^x (x - t)\ f(t)\,dt\,.$$

F est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $F'' = f$.

2e. La série définissant F étant uniformément (normalement) convergente sur $\mathbb{R}$, il en résulte que :

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n^2}\ a_n \qquad n \geq 1$$

et

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n^2}\ b_n \qquad n \geq 1.$$

F étant de classe C^2, en intégrant par parties, il vient :

$$\frac{1}{n^2}\ a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\ \sin nx\,.F(x)\ \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\ \frac{\sin nx}{n}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\ \sin nx\,dx$$

et, puisque $F'(-\pi) = F'(\pi)$:

$$\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\ \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} F''(x)\ \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos nx\,dx$$

i.e. $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $n \geq 1$.

De même, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, $n \geq 1$.

Partie III

1. Soit $\tilde{f}$ le prolongement impair et 2π–périodique de f à $\mathbb{R}$.

Comme $f(0) = f(\pi) = 0$, $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in [0 , +\infty[$. Il existe un entier $k \geq 0$ tel que $k\pi \leq x < (k+1)\pi$.
Posons $y = x - k\pi \in [0 , \pi]$. On a $sin(nx) = (-1)^{nk}\, sin(ny)$.

- Si $k = 2p$ est pair, alors $sin(nx) = sin(ny)$ et donc la série $\sum_{1}^{+\infty} b_n\, sin(nx)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, sin(nx) = f(y) = f(x - 2p\pi) = \tilde{f}(x) \ .$$

- Si $k = 2p+1$ est impair, alors $sin(nx) = (-1)^n\, sin(ny) = -\, sin\, n(\pi - y)$ et donc la série $\sum_{1}^{+\infty} b_n\, sin(nx)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, sin(nx) = -f(\pi - y)$, $\pi - y \in [0 , \pi]$

$$= -f((2p+2)\,\pi - x) \ = -\tilde{f}(-x) \ = \tilde{f}(x) \ .$$

De même pour $x \in]-\infty , 0]$, la série $\sum_{1}^{+\infty} b_n\, sin(nx)$ converge et vaut $-\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x)$, d'où le résultat.

Les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ sont $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ cos(nx)\, dx = 0$ puisque $\tilde{f}$ est impaire et

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, sin(nx)\, dx \ \text{ pour } n \in \mathbb{N} .$$

Et d'après le §II, il résulte que $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\ sin(nx)\, dx = b_n$,

i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, sin(nx)\, dx = b_n$.

2. On a :

$$J((1-t)u + tv) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [((1-t)u' + tv')^2 + ((1-t)u + tv)^2]\, dx - \int_0^{\pi} f[(1-t)u + tv]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left\{(1-t)^2 u'^2 + t^2 v'^2 + 2t(1-t)u'v' + (1-t)^2 u^2 + t^2 v^2 + 2t(1-t)uv\right\}\, dx$$

$$-(1-t)\int_0^{\pi} fu\, dx - t\int_0^{\pi} fv\, dx \ .$$

De même :

$$(1-t)\, J(u) + t\, J(v) = \frac{1-t}{2}\int_0^{\pi}(u'^2 + u^2)\, dx - (1-t)\int_0^{\pi} fu\, dx + \frac{t}{2}\int_0^{\pi}(v'^2 + v^2)\, dx - t\int_0^{\pi} fv\, dx$$

et donc :

$$J((1-t)u + tv) - (1-t)\, J(u) - t\, J(v) = \frac{1}{2}\,(1-t)\int_0^{\pi}((1-t)-1)\, u'^2 + \frac{1}{2}\ t\int_0^{\pi}(t-1)\ v'^2$$

$$+ \frac{1}{2}\,(1-t)\int_0^{\pi}((1-t)-1)\, u^2 + \frac{1}{2}\ t\int_0^{\pi}(t-1)\ v^2$$

$$+ \frac{2}{2}\ t(1-t)\int_0^{\pi}(u'v' + uv)$$

$$= -\frac{t(1-t)}{2}\int_0^\pi u'^2+v'^2+u^2+v^2-2u'v'-2uv$$

$$= -\frac{t(1-t)}{2}\int_0^\pi [(u'-v')^2+(u-v)^2]\ dx\,.$$

3. Si u_1 et u_2 sont solutions du problème (P) alors en prenant $t=\frac{1}{2}$, $u=u_1$ et $v=u_2$, il vient :

$$J\left(\frac{1}{2}(u_1+u_2)\right)+\frac{1}{8}\int_0^\pi [(u'_1-u'_2)^2+(u_1-u_2)^2]\ dx = \frac{1}{2}(J(u_1)+J(u_2))$$

$$\leq \frac{1}{2}\ 2J\left(\frac{1}{2}(u_1+u_2)\right)=J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)$$

car $\frac{1}{2}(u_1+u_2)\in E_0$ et donc $\int_0^\pi [(u'_1-u'_2)^2+(u_1-u_2)^2]\ dx = 0$.

Et, comme u_1 et u_2 sont continues sur $[0,\pi]$, $\int_0^\pi (u_1-u_2)^2\,dx=0 \Rightarrow u_1\equiv u_2$.

4a. Pour $u,v\in E_0$, on peut écrire : $J((1-t)u+tv)=J(u+t(v-u))$ et, en posant $w=v-u$, il vient de la question 2 :

$$J(u+tw) = J(u)+t\,J(w+u)-t\,J(u)-\frac{t(1-t)}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\ dx$$

$$= J(u)+t\left\{J(u+w)-J(u)-\frac{1}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\,dx\right\}+\frac{t^2}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\ dx$$

$$= J(u)+t\left\{\frac{1}{2}\int_0^\pi [(u'+w')^2+(u+w)^2-u'^2-u^2-w'^2-w^2]-\int_0^\pi fw\right\}+\frac{t^2}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\ dx$$

$$= J(u)+t\left\{\int_0^\pi (u'w'+uw)-\int_0^\pi fw\right\}+\frac{t^2}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\ dx\,.\ \ \underline{cqfd}$$

4b. On a : $u\in E_0$ est solution de (P) si et seulement si, pour tout $w\in E_0$, et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$J(u) \leq J(u+tw) = J(u)+\cdots$

i.e. $\forall t\in\mathbb{R},\forall w\in E_0\}\quad 0\leq t\left\{\int_0^\pi (u'w'+uw)-\int_0^\pi fw\right\}+\frac{t^2}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\ dx$

ce qui implique pour $t>0$, $\forall w\in E_0$, $0\leq\int_0^\pi [(u'w'+uw)-fw]\,dx+\frac{t}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\ dx$, et en faisant tendre t vers 0 : $0\leq\int_0^\pi [u'w'+uw-fw]\,dx$, $\forall w\in E_0$.

En changeant w en $-w$, cela implique que $\forall w\in E_0$: $\int_0^\pi (u'w'+uw) = \int_0^\pi fw\quad (P')$.

Réciproquement, si cette condition est réalisée, il résulte du calcul précédent que :

$$J(u+tw)=J(u)+\frac{t^2}{2}\int_0^\pi (w'^2+w^2)\ dx\geq J(u)\ ,\quad \forall t\in\mathbb{R},\forall w\in E_0\ .$$

5a. Soit $u\in E_0$ une solution de (P).

En prenant $v=\sin nx$, qui appartient à E_0, dans (P'), il vient, pour tout entier $n\geq 1$:

$$n\int_0^\pi u'\cos nx\,dx+\int_0^\pi u\sin nx\,dx = \int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

et, en intégrant par parties : $\int_0^\pi u' \cos nx\, dx = u \cos nx \Big|_0^\pi + n \int_0^\pi u \sin nx\, dx$

d'où la relation : $\quad (n^2 + 1) \int_0^\pi u(x) \sin(nx)\, dx = \frac{\pi}{2} b_n$

i.e. $\quad u_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi u(x) \sin(nx)\, dx = \frac{b_n}{n^2+1}$.

5b. $\tilde{u}(x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ car la série $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2+1} \sin nx$ est normalement convergente puisque $(b_n)_n$ est une suite de coefficients de Fourier, donc est bornée.

Par ailleurs, la fonction $w(x)$ définie par $w(x) = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2(n^2+1)} \sin(nx)$ est de classe C^2 (on peut dériver deux fois terme à terme, les séries obtenues convergent normalement sur $\mathbb{R}$) et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad w''(x) = -\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2+1} \sin nx = -\tilde{u}(x)$$

et donc, puisque d'après le §II, la série $v(x) := \sum_1^\infty \frac{b_n}{n^2} \sin nx$ définit une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$v''(x) = \tilde{f}(x) \quad .$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\tilde{u}''(x) + \tilde{u}(x) = \tilde{f}(x)$.

Par ailleurs, on a bien $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(\pi) = 0$.

5c. Il est clair que $u = \tilde{u}\,\big|_{[0\,,\,\pi]}$, d'après la question précédente, vérifie :

$$(D) \quad \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} .$$

5d. Montrons que u est solution de (P') : d'après (D), pour toute fonction $v \in E_0$, il vient :

$$-\int_0^\pi u'' v + \int_0^\pi uv = \int_0^\pi fv$$

et, en intégrant par parties,

$$-\int_0^\pi u'' v\, dx = -\left[u'v \Big|_0^\pi - \int_0^\pi u'v'\, dx \right] = \int_0^\pi u'v'\, dx$$

et donc, pour tout $v \in E_0$, $\int_0^\pi u'v' + uv = \int_0^\pi fv\, dx$, *i.e.* : (P') .

Et d'après 4b. , u est solution de (P).