PARTIE 2

Mathématiques, statistiques et probabilités

Le candidat traitera, dans l'ordre de son choix, les quatre exercices suivants.

Exercice n° 1 :

Soit $\sum u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n non nul.

On note $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
   La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 2 :

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall \quad n \in \mathbb{N}^* \ , \ P(X = n+1) = \frac{4}{n} P(X = n).$$

1. Calculer $P(X = 1)$. En déduire la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ (On pourra remarquer utilement que $X - 1$ suit une loi usuelle).

Exercice n° 3 :

On appelle A la matrice carrée d'ordre $n > 0$ possédant des 2 sur sa diagonale et des 1 ailleurs, soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit J la matrice carrée d'ordre $n > 0$ dont le terme général est égal à 1, soit :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Exprimer la matrice J^2 en fonction de la matrice J.

   (b) En déduire un polynôme annulateur du second degré de la matrice A.

2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

3. (a) Montrer qu'il existe une matrice P appartenant au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

   (b) Déterminer les valeurs propres de la matrice A. En déduire une forme possible de la matrice D.

Exercice n° 4 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe P de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$, avec t un paramètre réel ($t \in \mathbb{R}$).

1. Donner, en la justifiant, la nature de la courbe P.

2. Déterminer les composantes d'un vecteur tangent $\vec{T}(t)$ et d'un vecteur normal $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$ de paramètre t de la courbe P.

3. On considère, pour la suite de l'exercice, deux points quelconques A et B de la courbe P qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes a et b du paramètre t. On note T_A et T_B les tangentes respectives à la courbe P aux points respectifs A et B. On admet ce qui suit :

$$T_A \text{ a pour équation : } x - 2ay + a^2 = 0$$
$$T_B \text{ a pour équation : } x - 2by + b^2 = 0$$

   On note M le point d'intersection des deux tangentes T_A et T_B. Déterminer les coordonnées du point M.