Correction du sujet : Mathématiques, statistiques et probabilités

Exercice n° 1 : Séries de fonctions

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$.

1. **Convergence simple sur $\mathbb{R}$:** Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Lorsque $n \to +\infty$, on a l'équivalence suivante :
$$u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2}$$
Or, la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Par théorème de comparaison des séries à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang), la série $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc simplement.
Conclusion : La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. **Convergence normale :**
   — **Sur $[-a, a]$ avec $a > 0$:** Pour tout $x \in [-a, a]$, on a $|x| \leq a$ et $x^2 \geq 0$. On peut majorer le terme général :
$$|u_n(x)| = \frac{2|x|}{x^2 + n^2\pi^2} \leq \frac{2a}{n^2\pi^2}$$
   La série numérique $\sum \frac{2a}{n^2\pi^2}$ est convergente (indépendante de x). Donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
   — **Sur $\mathbb{R}$:** Étudions la fonction $f_n : x \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$. Sa dérivée est $f_n'(x) = \frac{2(x^2+n^2\pi^2)-2x(2x)}{(x^2+n^2\pi^2)^2} = \frac{2n^2\pi^2-2x^2}{(x^2+n^2\pi^2)^2}$. Le maximum est atteint pour $x^2 = n^2\pi^2$, soit $x = n\pi$.
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = |u_n(n\pi)| = \frac{2n\pi}{n^2\pi^2 + n^2\pi^2} = \frac{2n\pi}{2n^2\pi^2} = \frac{1}{n\pi}$$
   La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. **Conclusion :** La série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
3. **Continuité de U :**
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule jamais).
   — Soit $a > 0$. La série converge normalement, donc uniformément sur le segment $[-a, a]$.
   — La somme U est donc continue sur tout segment $[-a, a]$.

   Comme cela est vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que U est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 2 : Probabilités

Soit la relation de récurrence : $P(X=n+1)=\frac{4}{n}P(X=n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1. **Calcul de $P(X=1)$ et loi de X :** Exprimons $P(X=k)$ en fonction de $P(X=1)$ par itération :

$$\begin{aligned}
P(X=2)&=\frac{4}{1}P(X=1)\\
P(X=3)&=\frac{4}{2}P(X=2)=\frac{4^2}{2\times 1}P(X=1)\\
&\vdots\\
P(X=k)&=\frac{4^{k-1}}{(k-1)!}P(X=1)\quad\text{pour } k\geq 1
\end{aligned}$$

La somme des probabilités vaut 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1 \iff P(X=1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4^{k-1}}{(k-1)!}=1$$

En posant $j=k-1$, on reconnait le développement en série de l'exponentielle :

$$P(X=1)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{4^j}{j!}=1 \iff P(X=1)e^4=1 \iff P(X=1)=e^{-4}$$

Loi de X : Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=\frac{4^{k-1}}{(k-1)!}e^{-4}$.

2. **Calcul de E(X) et V(X) :** Posons $Y=X-1$. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$P(Y=k)=P(X=k+1)=\frac{4^k}{k!}e^{-4}$$

On reconnait une loi de Poisson de paramètre $\lambda=4$: $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(4)$. Or, on sait que pour une loi de Poisson, $E(Y)=\lambda$ et $V(Y)=\lambda$.

$$\begin{aligned}
E(X)&=E(Y+1)=E(Y)+1=4+1=5\\
V(X)&=V(Y+1)=V(Y)=4
\end{aligned}$$

Exercice n° 3 : Algèbre linéaire

$A=\begin{pmatrix}2&1&\dots&1\\1&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&1\\1&\dots&1&2\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\\vdots&(1)&\vdots\\1&\dots&1\end{pmatrix}$. On remarque que $A=J+I_n$.

1. (a) **Calcul de J^2 :** Le produit de la ligne i (qui ne contient que des 1) par la colonne j (qui ne contient que des 1) donne la somme de n fois 1. Donc tous les coefficients de J^2 valent n.

$$J^2=nJ$$

(b) **Polynôme annulateur de A :** On a $J = A - I_n$. En substituant dans $J^2 = nJ$:

$$(A - I_n)^2 = n(A - I_n)$$
$$A^2 - 2A + I_n = nA - nI_n$$
$$A^2 - (n+2)A + (n+1)I_n = 0$$

Un polynôme annulateur est donc $P(X) = X^2 - (n+2)X + (n+1)$.

2. **Inverse de A :** De l'équation précédente, on tire :

$$A^2 - (n+2)A = -(n+1)I_n$$
$$A \times \left(\frac{A-(n+2)I_n}{-(n+1)}\right) = I_n$$
$$A \times \frac{1}{n+1}((n+2)I_n - A) = I_n$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n+1}((n+2)I_n - A)$. En utilisant $A = J + I_n$, on peut simplifier : $A^{-1} = \frac{1}{n+1}((n+2)I_n - (J + I_n)) = \frac{1}{n+1}((n+1)I_n - J) = I_n - \frac{1}{n+1}J$.

3. (a) **Diagonalisation :** La matrice A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) **Valeurs propres :** Les valeurs propres sont les racines du polynôme annulateur $X^2 - (n+2)X + (n+1) = 0$. Discriminant $\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2+4n+4-4n-4 = n^2$. Les racines sont $\lambda_1 = \frac{n+2+n}{2} = n+1$ et $\lambda_2 = \frac{n+2-n}{2} = 1$. Comme $A = J + I$, les valeurs propres de A sont celles de J augmentées de 1. J est de rang 1 (toutes les colonnes sont égales), donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. La trace de J est n, donc l'autre valeur propre est n. Spectre de J : $\{n, 0, \dots, 0\}$. Spectre de A : $\{n+1, 1, \dots, 1\}$.
Forme de D : $D = \text{diag}(n+1, 1, \dots, 1)$.

Exercice n° 4 : Géométrie paramétrique

Système : $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. **Nature de la courbe :** On remarque que pour tout t, $x = (y)^2$. Donc $x = y^2$. Il s'agit d'une **parabole** d'axe (Ox), de sommet $O(0,0)$ et ouverte vers les x positifs.
2. **Vecteurs tangent et normal :** Soit $M(t)$ le point de paramètre t.
   — Vecteur dérivé (tangent) : $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est un vecteur directeur de la tangente $\vec{T}(t)$.
   — Vecteur normal $\vec{N}(t)$: Il doit être orthogonal à $\vec{T}(t)$. On peut choisir $\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}$. Par exemple : $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}$.

3. **Intersection des tangentes :** On a les équations admises : $(T_A) : x - 2ay + a^2 = 0$ $(T_B) : x - 2by + b^2 = 0$
   Pour trouver le point d'intersection $M(x, y)$, on résout le système en soustrayant la deuxième équation à la première :

$$(x - 2ay + a^2) - (x - 2by + b^2) = 0$$

$$-2ay + 2by + a^2 - b^2 = 0$$

$$2y(b - a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

   Comme A et B sont distincts, $a \neq b$, on peut diviser par $(b - a)$:

$$2y = a + b \implies y_M = \frac{a + b}{2}$$

   On remplace y dans l'équation de T_A pour trouver x :

$$x - 2a\left(\frac{a + b}{2}\right) + a^2 = 0$$

$$x - a(a + b) + a^2 = 0$$

$$x - a^2 - ab + a^2 = 0 \implies x_M = ab$$

   Coordonnées de M : $M\left(ab\,;\ \frac{a+b}{2}\right)$.