Année 2017-2018

Séance 1

Séquence 18 : **La réciproque de Pythagore**

Objectifs :

- Connaitre l'énoncé de la réciproque de Pythagore
- Savoir démontrer d'un triangle est rectangle
- Conjecturer la contraposée de Pythagore
- Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Faire marquer le **devoir maison** dans le cahier de textes. Il est à rendre pour le Jeudi 24 Mai 2018.

.

Activité 1: **Réflexion : Les prérequis.**

La Notion de Réciproque

1. Prouver que lorsqu'un nombre se termine par 5 alors il est divisible par 5. (Utilisez le calcul littéral)
2. Montrer que la phrase suivante n'est pas vraie : « Lorsqu'un nombre est divisible par 5 alors il se termine par 5 ».

Un théorème (ou une propriété) est une phrase vraie (démontrée) qui s'énonce toujours, après avoir précisé les objets utilisés :

Si ……………………………………, alors ……………………………………

Par exemple, nous connaissons le théorème suivant :

Si un nombre entier se termine par 5 , alors ce nombre est divisible par 5.

La première phrase (la première proposition) s'appelle l'hypothèse et la seconde phrase (la deuxième proposition) s'appelle la conclusion.

Un théorème est donc une écriture démontrée du type :

(Objets mathématiques utilisés)

Si $\underbrace{\text{……………………………………}}_{\text{Hypothèse(s)}}$, alors $\underbrace{\text{………………………}}_{\text{Conclusion(s)}}$

Le théorème ci-contre peut également s'exprimer sans suivre la construction Si…. alors … . Il peut, par exemple, s'énoncer ainsi :

« Un nombre qui se termine par 5 est divisible par 5 ».

Lorsque cette écriture est démontrée et donc est qualifiée de théorème, nous pouvons chercher si la réciproque de ce théorème est vraie.

La réciproque s'obtient en intervertissant Hypothèse(s) et Conclusion(s).

(Objets mathématiques utilisés)

Si $\underbrace{\text{………………………}}_{\text{Conclusion(s)}}$, alors $\underbrace{\text{……………………………………}}_{\text{Hypothèse(s)}}$.

Activité 2: Problématique : Conjecturer des propriétés.

Enoncé d'un raisonnement

Attention, la réciproque n'est pas nécessairement vraie, c'est à dire que cette réciproque ne devient pas nécessairement un nouveau théorème.
Si nous reprenons le théorème énoncé précédemment :

Si un nombre entier se termine par 5 , alors ce nombre est divisible par 5.

la réciproque devient :

Si un nombre entier est divisible par 5 , alors ce nombre se termine par 5.

Un simple contre-exemple permet d'affirmer que cette phrase est fausse.
Par exemple le nombre 10 est divisible par 5 , mais ne se termine pas par 5 !!! (Voir ci-contre)
Donc la réciproque du théorème énoncé est fausse.

Cet unique exemple permet d'affirmer que la phrase proposée est fausse. Un tel exemple (qui permet de contredire la « propriété ») s'appelle un contre-exemple. Retenons que des exemples, même nombreux, ne constituent pas une preuve, mais un contre-exemple est une preuve.

Revenons au théorème de Pythagore.
Ce théorème s'énonce ainsi :
Si ABC est un triangle rectangle en A , alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$
La réciproque de ce théorème est donc :
Si $BC^2 = BA^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A
Cette nouvelle phrase étant vraie (démonstration proposée dans un autre document), elle devient un théorème appelé réciproque du théorème de Pythagore.

Propriété :

Ce nouveau théorème (la réciproque du théorème de Pythagore) sert, lorsque l'on connaît les longueurs des trois côtés, à démontrer qu'un triangle est rectangle.

Culture : Lorsqu'on ne connait pas ses tables de multiplication il est facile de les « reconstruire », à l'aide de la **table de Pythagore**

La table de multiplication appelée usuellement Table de Pythagore :

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Conseil : le jour du brevet si votre calculatrice tombe en panne, et que vous avez un doute sur vos tables de multiplication, reconstruisez la table de Pythagore

Activité 3: Vocabulaire, définitions, Propriétés.

Séance 2

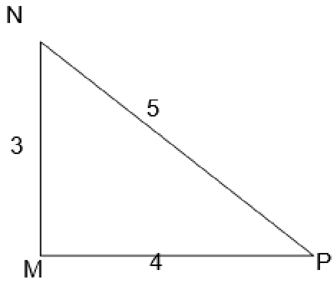
RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE :

- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = BA^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

Remarque : Notion de réciproque :

Réciproque de la propriété de Pythagore :

Si dans un triangle le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres alors ce triangle est rectangle et le côté en est l'hypoténuse.



$NP^2 = 25$
$MN^2 + MP^2 = 9 + 16 = 25$
$NP^2 = MN^2 + MP^2$
Donc
le triangle est rectangle en M

Illustration :

Soit un triangle MNP.

***Si** ses côtés vérifient la relation :*

$NP^2 = MN^2 + MP^2$

***alors** ce triangle est rectangle en M.*

Activité 3: Vocabulaire, définitions, Propriétés.

Séance 3

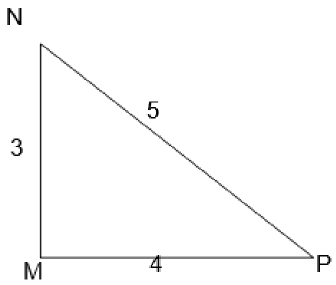
RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE :

- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = BA^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

Remarque : Notion de réciproque :

Réciproque de la propriété de Pythagore :

Si dans un triangle le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres alors ce triangle est rectangle et le côté en est l'hypoténuse.



$NP^2 = 25$
$MN^2 + MP^2 = 9 + 16 = 25$
$NP^2 = MN^2 + MP^2$
Donc
le triangle est rectangle en M

Illustration :

Soit un triangle MNP.

***Si** ses côtés vérifient la relation :*

$NP^2 = MN^2 + MP^2$

***alors** ce triangle est rectangle en M.*

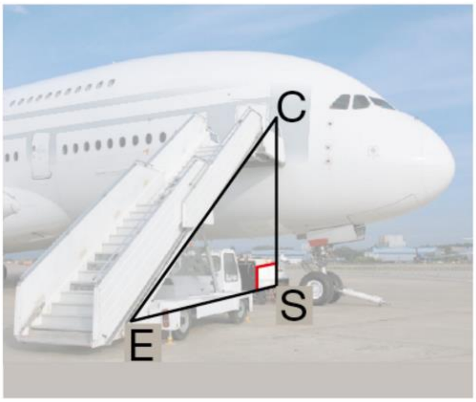
Activité 4: Applications

Séance 3

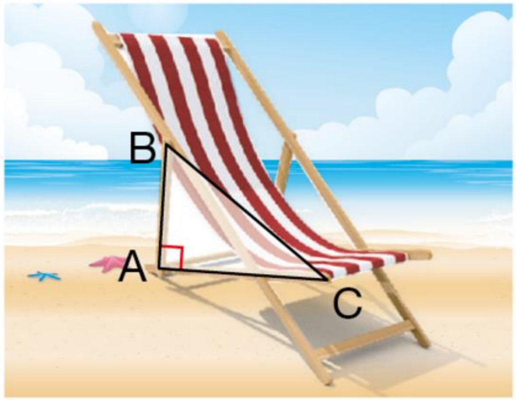
Application 1 : Reconnaitre une configuration où l'on peut appliquer le Th de Pyth

33 Pour le triangle rectangle repéré sur chaque photo, appliquer le théorème de Pythagore.

a.

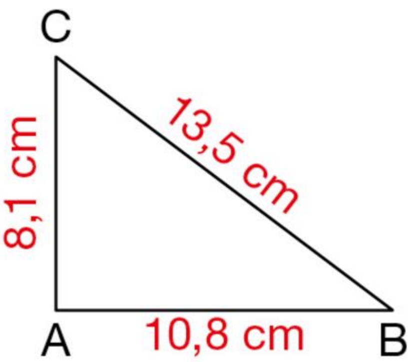


b.



Application 2 : Vérifier qu'un triangle est rectangle à l'aide de la Réciproque du Th de Pyth

52 Avec la calculatrice, vérifier que Myriam a raison.



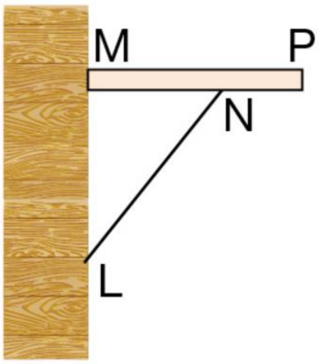
Application 3 : Vérifier qu'un triangle est rectangle à l'aide de la Réciproque du Th de Pyth

56 Sur un mur vertical, Valérie a posé une étagère. Voici les mesures qu'elle a effectuées :

MP = NL = 30 cm, NP = 12 cm,

ML = 24 cm.

L'étagère est-elle horizontale?



Activité 5: Tâche complexe.

Séance 4

Tâche complexe

Appliquer l'égalité de Pythagore

1 Les écrans

L'appareil ci-contre est vendu avec la mention « diagonale de 12 pouces » (un pouce est égal à 2,54 cm).
Pour contrôler cette information, Elsa mesure la longueur et la largeur de cet écran : MN = 14,9 cm et NP = 26,6 cm.

a. Quelle est la nature du triangle MNP ? Expliquer.

b. Écrire l'égalité de Pythagore dans le triangle MNP.

c. En déduire que $MP^2 = 929{,}57$.

d. La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice fournit une valeur approchée du nombre positif dont le carré est 929,57.
Avec la calculatrice, indiquer si la mention « 12 pouces » est adaptée à cet écran.

Aide à la résolution d'une tâche complexe :

CHERCHER (extraire l'information utile)

1. Soulignez les mots qui impliquent des propriétés mathématiques
2. Entourez les données (valeurs) qui seront utiles à la résolution
3. Barrez les informations parasites (inutiles)

RAISONNER (faire le lien entre ses connaissances et le problème posé)

4. Ecrire les énoncés des théorèmes que vous utiliserez

MODELISER (représenter le problème sous forme explicite)

5. Faites des schémas qui vous permettent de modéliser le problème donné

CALCULER (effectuer des opérations mathématiques)

6. Calculer les valeurs demandées

REPRESENTER (illustrer ses solutions sous forme schématique)

7. Faites un schéma pour présenter votre solution

COMMUNIQUER (utiliser les symboles et termes appropriés)

8. Faites des phrases pour répondre aux questions posées.
9. Encadrer ses valeurs réponses
10. Souligner les phrases réponses.

Activité 6: TICE

Séance 5

Objectif : GEOGEBRA

Compétences : Se servir d'un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer des propriétés d'un triangle.

Activité 1 : rappels sur Pythagore

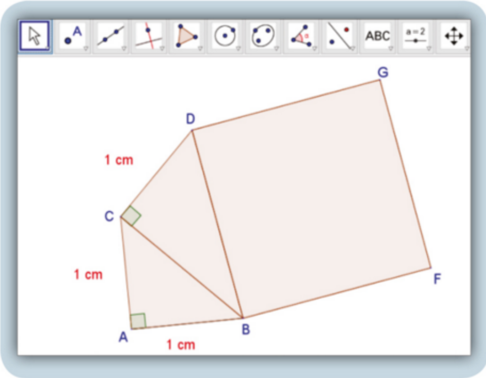
68 Construire un carré d'aire donnée

1 Conjecturer avec GeoGebra

a. Construire un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que AB = 1 cm.

b. Construire le triangle BCD rectangle en C, extérieur au triangle ABC, tel que CD = 1 cm.

c. Créer le carré BDGF extérieur au triangle BCD. Afficher son aire (utiliser Aire).



2 Prouver

Avec les données de la figure ci-contre, calculer BC^2, puis BD^2 et retrouver l'aire du carré BDGF affichée par le logiciel.

3 Appliquer

a. Avec les instruments de géométrie et en vous inspirant de la question 1, construire un carré d'aire 5 cm^2.

b. Rédiger un programme de construction d'un tel carré.

Activité 2 : Exploiter la réciproque de Pythagore

69 Conjecturer, puis prouver

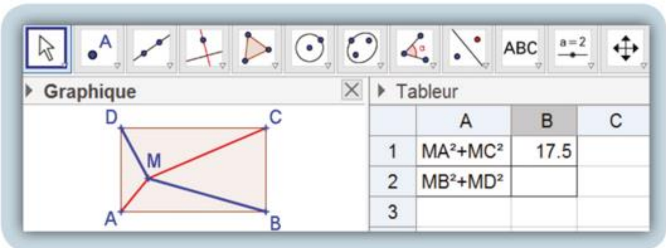
ABCD est un rectangle et M est un point intérieur à ce rectangle. On se propose de comparer $MA^2 + MC^2$ et $MB^2 + MD^2$.

1 Conjecturer avec GeoGebra

a. Créer la figure ci-contre et les segments [MA], [MB], [MC], [MD].

b. Dans le tableur de Geogebra, saisir MA²+MC² dans la cellule A1 et MB²+MD² dans A2.

Dans la cellule B1, saisir =MA²+MC² et dans la cellule B2, saisir =MB²+MD² .



c. Déplacer le point M, modifier les dimensions du rectangle ABCD et observer les affichages. Que peut-on conjecturer ?

2 Prouver

a. Avec les notations ci-contre, expliquer pourquoi :

$$MA^2 + MC^2 = ME^2 + EA^2 + MF^2 + FC^2 \quad \text{et} \quad MB^2 + MD^2 = MF^2 + FB^2 + ME^2 + ED^2.$$

b. Prouver alors la conjecture émise à la question 1 c.